

Elementare Plasmaphysik

von

Prof. Dr. Rudolf Kippenhahn

und

Dr. Claus Möllenhoff

Universitäts-Sternwarte Göttingen



Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B. I.-Wissenschaftsverlag

Alle Rechte vorbehalten
Nachdruck, auch auszugsweise, verboten
© Bibliographisches Institut AG, Zürich 1975
Druck : Zehnersche Buchdruckerei, Speyer
Bindearbeit : Pilger-Druckerei, Speyer
Printed in Germany
ISBN 3-411-01489-X
A

VORWORT

Dieses Buch entstand aus einer einsemestrigen einführenden Vorlesung mit drei Wochenstunden. Sie wurde von einem von uns (R.K.) zuerst 1959 an der Universität Erlangen und während der letzten 8 Jahre mehrmals an der Universität Göttingen gehalten. Nach zwei Ausarbeitungen dieser Vorlesung, angefertigt 1965 von den Herren Eduardo Gomez und Werner Lauterborn und 1968/69 vom anderen der Autoren (C.M.), gingen wir daran, den Stoff für die Veröffentlichung vorzubereiten.

Die Vorlesung war im Laufe der Jahre gewachsen und wurde immer mehr abgerundet. Das geschah teilweise, indem der Dozent durch die Fragen der Studierenden öfters in Not gebracht wurde und logische Sprünge, Irrtümer und Fehler bemerkte, teilweise durch neue Anregungen der Literatur. Wir haben versucht, die benutzten Quellen vollständig anzugeben. Manchmal war es schwer zu rekonstruieren, von woher irgendein vor Jahren in die Vorlesung eingearbeiteter Beitrag kam. Ganz wesentlich war jedoch der Einfluß, den die Vorlesungsausarbeitung von Arnulf Schlüters „Plasmaphysik“ (Schlüter 1959) hatte. Leider kursieren von dieser in geringer Auflage vervielfältigten Ausarbeitung heute nur noch wenige Liebhaberexemplare.

Zur Veröffentlichung fühlten wir uns ermutigt, weil es am deutschen Büchermarkt unserer Meinung nach keine wirklich einfache Einführung in die Plasmaphysik gibt. Ferdinand Caps „Einführung“ (Cap 1972) ist dem Niveau nach wesentlich höher, und sie geht in ihrer Vollständigkeit weit über das Ziel hinaus, das wir uns gestellt haben, nämlich in möglichst verständlicher Form auf die Formalismen der Plasmaphysik und ihre einfachsten Anwendungen hinzuweisen. Unser Leser braucht nur die Kenntnisse der Elektrodynamik und etwas aus der Mechanik mitzubringen, um dem Stoff folgen zu können. Vor die Wahl gestellt, mehr zu bringen und dafür knapper zu schreiben oder uns in der Stoffauswahl zu beschränken, sind wir den letzten Weg gegangen. So mußte die Theorie der Elementarprozesse (Ionisationsformeln, Theorie der Zweierstöße usw.) ganz wegbleiben. Der Leser findet die nötigen Ergänzungen zum Beispiel in Spitzers Buch (Spitzer 1962).

Daß wir die Anwendungsbeispiele fast immer aus der Astrophysik wählten, mögen uns unsere Kritiker nachsehen. Der Kardinal Barberini sagt in Brechts „Leben des Galilei“: „Leider habe ich auch einmal etwas Astronomie gelesen, das hängt einem an wie die Krätze.“ Wenn es schon Kardinälen so geht, wie erst uns . . .

Bei der kritischen Durchsicht des Manuskripts und bei der Prüfung der Formeln hat Frl. cand. phys. Margit Jakob wichtige Arbeit geleistet. Wir profitieren

ten viel bei Diskussionen mit anderen Kollegen; hervorzuheben ist dabei Herr Dr. M. Stix, der den Abschnitt über turbulente Dynamos prüfte.

Frau Hildegard Brandt fertigte fast alle Zeichnungen an. Frau Barbara Beyer und Frau Birgit Krebs schrieben das Manuskript. Und alle gingen auf unsere wiederholten Änderungswünsche immer wieder geduldig ein – wir danken ihnen herzlich.

Göttingen, 31. 12. 1973

Rudolf Kippenhahn
Claus Möllenhoff

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	9
Kapitel I: Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern.	11
§ 1: Maxwellsche Gleichungen und die Bewegungsgleichung	11
§ 2: Einfache Teilchenbahnen	13
§ 3: Driftbewegungen.	21
§ 4: Geladene Teilchen in axialsymmetrischen Magnetfeldern	25
§ 5: Erlaubte und verbotene Gebiete	29
§ 6: Das magnetische Moment	36
§ 7: Anwendungen	45
Kapitel II: Magnetohydrokinematik.	54
§ 8: Näherungsannahmen und Voraussetzungen	54
§ 9: Ein Anfangswertproblem	57
§ 10: Magnetfelder in bewegter Materie	59
§ 11: Abklingzeiten von Magnetfeldern	65
§ 12: Strömung quer zum Magnetfeld bei vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld	70
§ 13: Das Dynamo-Problem	77
§ 14: Statistische Dynamotheorie	86
Kapitel III: Magnetohydrodynamik.	97
§ 15: Die Kraftwirkung des Feldes auf die Materie.	97
§ 16: Die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik.	102
§ 17: Unstetigkeitsflächen und Flächenkräfte	109
§ 18: Sonnenfilamente im magnetohydrostatischen Gleichgewicht	117
§ 19: Kraftfreie Magnetfelder	123
§ 20: Hartmann-Strömung	127
§ 21: Magnetischer Auftrieb	136
Kapitel IV: Magnetohydrodynamische Wellen.	144
§ 22: Einfache Wellenlösungen	144
§ 23: Wellen im beliebigen Winkel zum Magnetfeld	151

§ 24: Anschauliche Diskussion des Stabilitätsproblems	163
§ 25: Stabilitätstheorie.	169
§ 26: Das Energieprinzip	176
Kapitel V: Magnetfelder in rotierenden Sternen	181
§ 27: Isorotation.	182
§ 28: Drehimpulsverlust durch stellaren Wind	184
§ 29: Magnetohydrodynamik des Sternwindes	190
§ 30: Pulsar-Elektrodynamik.	194
Kapitel VI: Zweikomponententheorie	201
§ 31: Die Gleichungen für die beiden Komponenten	201
§ 32: Diskussion der neuen Gleichungen	211
§ 33: Partialdrücke des Zweikomponentengases.	216
§ 34: Die Debye-Länge.	220
§ 35: Gravitationsfelder	225
§ 36: Makroskopische und mikroskopische Betrachtungsweise	231
§ 37: Wirbelsätze.	235
Kapitel VII: Wellen in der Zweikomponententheorie	239
§ 38: Plasmaschwingungen	239
§ 39: Wellen im Plasma ohne Magnetfeld	242
§ 40: Die Frequenzdrift der Pulsarsignale.	247
§ 41: Ausbreitung von Radiowellen in der Korona der Sonne	250
§ 42: Wellenausbreitung entlang magnetischer Feldlinien.	255
§ 43: Der Faraday-Effekt und das interstellare Magnetfeld	262
Kapitel VIII: Statistische Theorie	268
§ 44: Phasenraum und Verteilungsfunktion	268
§ 45: Die Vlasov-Gleichungen	271
§ 46: Herleitung der Gleichungen der Zweikomponententheorie aus den Vlasov-Gleichungen	274
§ 47: Störungstheorie	279
§ 48: Landau-Dämpfung	284
§ 49: Dämpfung und Anregung	289
Literatur	293
Register	295

EINLEITUNG

Mit dem Wort *Plasma* meint man in der Physik ein vollständig oder teilweise ionisiertes Gas, also ein Gemisch aus Elektronen, Ionen und neutralen Teilchen. In unserer irdischen Umgebung ist die Temperatur so niedrig, die Dichte der Materie vergleichsweise so gering und das Strahlungsfeld von so niedriger Energie, daß sich Elektronen und Ionen fast überall zu neutralen Atomen vereinigt haben. Wegen der niedrigen Temperatur ist ein großer Teil der neutralen Atome weiter zu Flüssigkeiten oder zu Festkörpern kondensiert.

So hat es bis ins letzte Jahrhundert gedauert, bis man mit dem Studium ionisierter Gase begann. Erst 1928 führte der Chemiker Langmuir den Namen „Plasma“ ein. Der Physiker Frank-Kamenezki (1963) schreibt: „Vom Plasma sprechen die Physiker erst seit kurzer Zeit, doch gesehen hat es schon jeder von uns. In dem imposanten Schauspiel, das Blitz und Nordlicht bieten, ist das Plasma der Hauptakteur. Wer einmal das ‚Vergnügen‘ hatte, einen Kurzschluß in der elektrischen Leitung zu verursachen, hat ebenfalls mit dem Plasma Bekanntschaft gemacht. Der Funke, der von einem Leiter zum anderen überspringt, besteht aus dem Plasma einer elektrischen Entladung in der Luft. Wenn wir abends durch die Straßen einer Großstadt spazieren und die Lichtreklamen sehen, denken wir nicht daran, daß in den Röhren das Plasma der Edelgase Neon oder Argon leuchtet. Jeder bis auf eine ausreichend hohe Temperatur erhitzte Stoff geht in den Plasmazustand über. Am einfachsten erfolgt dieser Übergang bei den Dämpfen der Alkalimetalle wie Natrium, Kalium und besonders dem schwersten unter ihnen, dem Cäsium. Eine gewöhnliche Flamme besitzt eine gewisse elektrische Leitfähigkeit; sie ist – wenn auch in geringem Maße – ionisiert, d.h. ein Plasma. Die Ursache für diese Leitfähigkeit ist eine geringfügige Beimengung von Natrium, das man an der gelben Färbung der Flamme erkennt. Um aber ein vollständig ionisiertes Plasma zu erhalten, bedarf es Temperaturen in der Größenordnung von mehr als zehntausend Grad.“

Im Weltall ist die Materie zum großen Teil ionisiert. Elektronen und Ionen können sich frei gegeneinander bewegen, elektromagnetische Kräfte bestimmen bisweilen die Bewegung der Materie stärker als die Schwerkraft. Das gilt für die Sterne selbst wie auch für den interstellaren Raum. Vergleicht man die Materiemengen, so muß man sagen, daß der „Normalzustand“ der Materie in der Welt das Plasma ist; und Materie in ihrer neutralen Form, in der sie unseren Lebensraum bildet, ist die Ausnahme.

Die geladenen Teilchen verleihen dem Plasma so viele neue Eigenschaften gegenüber der Materie in der von uns gewohnten Form, daß Frank-Kamenezki (1963) vom Plasmazustand als dem „vierten Aggregatzustand“ spricht. Im

Plasma können sich durch elektromagnetische Kräfte neue Schwingungsformen bilden. Es besitzt einen von Eins verschiedenen Brechungsindex für elektromagnetische Wellen. Signale breiten sich daher im interstellaren Medium mit einer frequenzabhängigen Geschwindigkeit aus, ihre Polarisationsrichtung wird außerdem von Magnetfeldern gedreht. Radiowellen geeigneter Frequenz werden vom Plasma reflektiert. Plasma verhält sich diamagnetisch, ähnlich wie bei einem Supraleiter können äußere Magnetfelder nicht ohne weiteres eindringen. Auf diese Weise werden Plasmaballen in der Korona der Sonne von Magnetfeldern freischwebend im Gravitationsfeld gehalten oder durch elektromagnetische Beschleunigungsmechanismen in den Raum hinausgeschossen. — Umgekehrt behindern Magnetfeldschläuche, die aus der Sonnenoberfläche hervortreten, die konvektive Bewegung der Materie. Sie verringern deshalb den aus dem Sonneninnern kommenden Energiestrom und bilden die dunklen Sonnenflecken. — Ströme von Plasmamaterie können wie Dynamos arbeiten und unter Verbrauch mechanischer Bewegungsenergie ein Magnetfeld gegen die Ohmschen Verluste aufrecht erhalten. Ein solcher Plasmadynamo ist auch für die Erzeugung des Magnetfeldes der Erde verantwortlich. — Geladene Teilchen, die im Magnetfeld der Erde gefangen sind, bilden Gürtel um den Erdball. Von der Sonne ausgeschleuderte Plasmawolken stören das Magnetfeld der Erde, Teilchen dringen bis in die obere Erdatmosphäre ein und erzeugen die Polarlichter.

Aus der Fülle der aufgezählten Beispiele ergibt sich die Bedeutung der Plasmaphysik für die Astrophysik. Deshalb ist in diesem Buch der Schwerpunkt der Anwendungen auf astrophysikalische Beispiele gelegt. Auf die Bedeutung der Plasmaphysik für Entladungsvorgänge und vor allem für die kontrollierte thermonukleare Fusion können wir kaum eingehen.

In den acht Kapiteln dieses Buches werden wir schrittweise die verschiedenen Eigenschaften von Materie im Plasmazustand studieren.

Kapitel I

BEWEGUNG GELADENER TEILCHEN IN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

§ 1. Maxwellsche Gleichungen und die Bewegungsgleichung

Wir beginnen zunächst mit der Zusammenfassung einiger Beziehungen aus der klassischen Elektrodynamik, von denen wir in diesem Buch immer wieder Gebrauch machen werden.

a) Das Maßsystem

Grundsätzlich werden wir immer im Gaußschen cgs-System rechnen. In diesen Einheiten ist die Elementarladung

$$-e = -4.803 \cdot 10^{-10} \text{ el.stat. cgs-Einheiten (cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}\text{)}.$$

Die Dimension der elektrischen Feldstärke ist identisch mit der Dimension der magnetischen Induktion:

$$[E] = [B] = \text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{-1},$$

wobei

$$1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec}^{-1} = 1 \text{ Gauß (}\Gamma\text{)} = 300 \text{ Volt cm}^{-1}.$$

In diesem Maßsystem ist dann im Vakuum die elektrische Feldstärke E gleich der elektrischen Induktion (elektrischen Verschiebungsdichte) D , d.h. $E = D$. Ebenso gilt $B = H$ für die Beziehung zwischen magnetischer Induktion (magnetischer Kraftflußdichte) B und magnetischer Feldstärke H . Eine Vektorgröße wollen wir immer durch Fettdruck kennzeichnen: B , während wir ihren Betrag in der Form $|B| = B$ schreiben.

Die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität, wie sie in den Maxwellschen Gleichungen in von Stoffen erfüllten Raum auftreten, sind ein Ausdruck dafür, daß mikroskopische Ladungen und Ströme in den makroskopischen Gleichungen pauschal in Form von Materialfunktionen berücksichtigt werden. Wir werden dagegen alle Ladungen und Ströme in den makroskopischen Gleichungen berücksichtigen. Wir behandeln also Felder und Teilchen im Vakuum. Deshalb werden wir durchweg $D = E$ und $H = B$ setzen.

b) Die Maxwell'schen Gleichungen

Im Gaußschen cgs-System lauten die Maxwell'schen Gleichungen dann

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sigma. \end{aligned}$$

Hier ist \mathbf{j} der Stromdichte-Vektor und σ die räumliche Ladungsdichte. Der Punkt über den Größen symbolisiert die zeitliche Ableitung $\partial/\partial t$.

c) Transformationsgleichungen

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme K und K' , wobei sich K' relativ zu K mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen möge. Dann gelten zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} , gemessen in K , und \mathbf{E}' und \mathbf{B}' , gemessen in K' , die folgenden Beziehungen:

$$(1.2) \quad \mathbf{E}' = \frac{1}{\gamma} [\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) (\gamma - 1) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

$$(1.3) \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{\gamma} [\mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) (\gamma - 1) - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}]$$

mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

In nichtrelativistischer Näherung, d.h., wenn wir Glieder der Ordnung v^2/c^2 vernachlässigen, vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$(1.4) \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

$$(1.5) \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Wir werden immer in der nichtrelativistischen Näherung rechnen, in der Effekte, die proportional zu v/c sind (z.B. Dopplereffekt), noch berücksichtigt werden, dagegen Effekte, die mit v^2/c^2 gehen (wie etwa die Lorentzkontraktion), vernachlässigt werden.

d) Bewegungsgleichung

In seinem Ruhssystem K' spürt ein mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegtes geladenes Teilchen nur das elektrische Feld. Die nichtrelativistische Bewegungsgleichung eines Teilchens der Masse m und der Ladung q im elektrischen und magnetischen Feld lautet also mit Gl. (1.4)

$$(1.6) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{E}' = q (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

\mathbf{E} und \mathbf{B} sind jetzt in dem System K des Beobachters gemessen, in dem das Teilchen die Geschwindigkeit \mathbf{v} hat. Das Glied $q/c (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ heißt die *Lorentzkraft*. Die weitere Untersuchung der obigen Bewegungsgleichung wird der Gegenstand des ganzen ersten Kapitels sein. Aus Gl. (1.6) läßt sich der Energiesatz für ein geladenes Teilchen im elektrischen und magnetischen Feld auf einfache Weise gewinnen: Multiplizieren wir Gl. (1.6) skalar mit \mathbf{v} , so erhalten wir:

$$(1.7) \quad m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

und wegen $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ bleibt

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Das ist der *Energiesatz*; er hat die gleiche Form wie in der Mechanik, wenn man als Kraft die *elektrische Kraft* (Coulomb-Kraft) $q \mathbf{E}$ nimmt. Die *magnetische Kraft* (Lorentzkraft) $q/c (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ gibt *keinen Beitrag* zur kinetischen Energie.

Im nächsten Paragraphen suchen wir einfache Lösungen der Bewegungsgleichung (1.6).

§ 2. Einfache Teilchenbahnen

Um zu sehen, wie sich ein aus geladenen Teilchen bestehendes Gas verhält, betrachten wir die Bewegung einzelner geladener Teilchen in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld. Die Teilchen selbst betrachten wir als Probekörper, vernachlässigen also das von ihnen selbst erzeugte Feld.

a) Gyrationbewegung

Es sei $\mathbf{E} = 0$, und \mathbf{B} sei homogen und zeitlich konstant. Mit diesen Annahmen liefert der Energiesatz (1.8) unmittelbar $|\mathbf{v}| = \text{const.}$ Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem ein, so daß $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Dann lautet die Bewegungsgleichung nach Gl. (1.6)

$$(2.1) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

oder in Komponenten:

$$m \ddot{x} = \frac{q}{c} B \dot{y},$$

$$(2.2) \quad m \ddot{y} = -\frac{q}{c} B \dot{x},$$

$$m \ddot{z} = 0.$$

Zunächst folgt durch Integration der z-Komponente:

$$(2.3) \quad z = \alpha + \beta t, \quad \alpha, \beta = \text{const.}$$

z ist eine lineare Funktion der Zeit; in Richtung des Magnetfeldes bewegt sich also das Teilchen geradlinig und gleichförmig. Zur Lösung der übrigen beiden Gleichungen von (2.2) führen wir die Größe

$$(2.4) \quad \omega_g = \frac{qB}{mc}$$

ein. Man überzeugt sich leicht durch Dimensionsbetrachtungen, daß ω_g eine Frequenz ist. Damit lauten die ersten beiden Gleichungen des Systems (2.2) jetzt

$$(2.5) \quad \ddot{x} = \omega_g \dot{y},$$

$$\ddot{y} = -\omega_g \dot{x}.$$

Durch Einführung einer komplexen Variablen

$$(2.6) \quad r = x + i y$$

geht Gl. (2.5) über in die komplexe Gleichung

$$(2.7) \quad \ddot{r} = -i \omega_g \dot{r}.$$

Das ist eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Exponentialansatz

$$(2.8) \quad r = a \exp(i \omega t)$$

liefert sie $\omega = -\omega_g$. Die allgemeine Lösung ist damit

$$(2.9) \quad r = a \exp(-i \omega_g t) + b,$$

wobei a, b komplexe Konstanten sind.

Durch die Wahl eines geeigneten Koordinatenursprungs können wir $b = 0$ erreichen. Außerdem wählen wir den Zeitnullpunkt so, daß r zur Zeit $t = 0$

reell wird; dann ist auch a reell. Die Gleichung (2.9) beschreibt dann eine Kreisbewegung in der x - y -Ebene um den Punkt $(x = 0, y = 0)$ mit dem Radius a und der Kreisfrequenz ω_g . Die Frequenz ω_g nennt man *Gyrationsfrequenz* oder *Larmorfrequenz*. Der Kreisbewegung in der x - y -Ebene ist natürlich noch die gleichförmige Bewegung in z -Richtung überlagert. Die resultierende Bewegung ist dann eine Spirale. Aus Gl. (2.9) folgt mit $b = 0$

$$(2.10) \quad \dot{\mathbf{r}} = -i \omega_g a \exp(-i \omega_g t).$$

Mit v_{\perp} sei der Betrag der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld \mathbf{B} bezeichnet. Mit

$$v_{\perp} = |\dot{\mathbf{r}}| = a |\omega_g|$$

folgt

$$(2.11) \quad a = \frac{v_{\perp}}{|\omega_g|} = \frac{m c v_{\perp}}{|q| B}.$$

Die Größe a heißt *Gyrationsradius* oder *Larmorradius* des Teilchens mit der Ladung q .

Bei vorgegebener Magnetfeldrichtung ist der Umlaufsinn der Gyration (und damit ω_g) abhängig vom Vorzeichen der Ladung q . Das ist in Abb. 2.1 dargestellt. Für negatives Vorzeichen der Ladung gilt die „Rechte-Hand-Regel“.

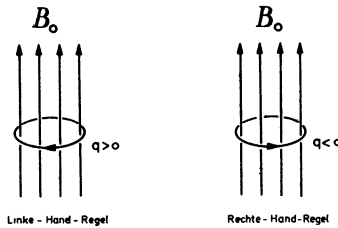


Abb. 2.1 Gyrationbewegung positiv und negativ geladener Teilchen im homogenen magnetischen Feld B_0 .

b) Zahlenwerte

Im folgenden geben wir alle Zahlenwerte in cgs-Einheiten an. Für das Proton folgt mit $q = 4.802 \times 10^{-10}$, $m_p = 1.672 \times 10^{-24}$ und $c = 2.998 \times 10^{10}$ für die Gyrationsfrequenz:

$$(2.12) \quad |\omega_{gp}| = 9.579 \times 10^3 B$$

(B in Gauß gemessen.) Für Elektronen erhält man mit $m_e = 9.108 \times 10^{-28}$:

$$(2.13) \quad |\omega_{ge}| = 1.759 \times 10^7 B.$$

Für Teilchen der Masse m , welche eine Maxwellverteilung der Temperatur T besitzen, ist die mittlere Geschwindigkeit

$$(2.14) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}},$$

wobei $k = 1.380 \times 10^{-16}$ erg/°K die Boltzmann-Konstante ist. Setzen wir dies für v_{\perp} in die Gleichung (2.11) für den Gyrationradius ein, so folgt

$$(2.15) \quad a = \frac{\bar{v}}{|\omega_g|} = \frac{c}{|q|B} \sqrt{\frac{8 k m}{\pi}} \cdot T^{1/2},$$

also

$$(2.16) \quad a = C \frac{T^{1/2}}{B}.$$

Dabei ist $C = 3.53 \times 10^{-2}$ für Elektronen und 1.51 für Protonen.

Wenn in einem Fusionsreaktor versucht wird, Deuterium in einem Magnetfeld von 10^4 G einzuschließen, dann folgt $|\omega_{ge}| = 1.759 \times 10^{11}$ für die Elektronen und $|\omega_{gD}| = 4.789 \times 10^7$ für die Deuteriumionen. Nehmen wir für unseren gedachten Fusionscharakter $T = 10^7$ °K an, so erhalten wir aus Gl. (2.16) mit $C = 2.1$ für Deuteriumionen $a_e = 1.11 \times 10^{-2}$, $a_p = 0.48$ und $a_D = 0.66$.

In der Photosphäre der Sonne hat man in den normalen Gebieten, also außerhalb der Sonnenflecken, Feldstärken von etwa 1 Gauß. Die Gyrationfrequenzen sind dann

$$|\omega_{ge}| = 1.8 \times 10^7, \quad |\omega_{gp}| = 9.6 \times 10^3.$$

Allerdings spielen in diesem Plasma, das eine Dichte der Ionen und Elektronen von etwa 10^{12} cm $^{-3}$ besitzt, die Gyrationbewegungen keine Rolle, da die Frequenzen der Stöße viel zu hoch sind. Die Stoßfrequenz der Elektronen miteinander ist etwa 9×10^7 sec $^{-1}$. Noch ehe ein Gyrationsumlauf beendet ist, wird also das geladene Teilchen durch Stöße gestört.

Anders ist dagegen die Situation in der *Korona* der Sonne. Dort ist die Dichte geringer ($n_e \approx n_p \approx 10^6$ cm $^{-3}$), und deshalb sind die Stöße seltener. Außerdem ist dort die Temperatur sehr hoch; auch das verringert die Effektivität der Stöße. Man hat dort bei gleicher magnetischer Feldstärke, also bei gleichen

Gyrationsfrequenzen wie in der Photosphäre, nur mehr Stoßfrequenzen von 8 sec^{-1} .

An den Stellen des Raumes, wo der interstellare Wasserstoff durch einen benachbarten heißen Stern ionisiert ist, also in sog. *HII-Gebieten*, hat man Temperaturen von etwa 10^4 K . Die Dichte von Elektronen und Wasserstoffionen liegt bei $n_e = n_p \approx 1 \text{ cm}^{-3}$, die Feldstärke bei 10^{-6} Gauß. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} |\omega_{ge}| &= 1.8 \times 10^1, & |\omega_{gp}| &= 9.6 \times 10^{-3}, \\ a_e &= 3.5 \times 10^6, & a_p &= 1.5 \times 10^8. \end{aligned}$$

Die Stoßfrequenz zwischen Elektronen ist demgegenüber sehr klein: $9 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$; ein Teilchen muß also mehrere Stunden warten, bis es durch einen Stoß aus seiner Gyrationsbahn geworfen wird.

c) Im Magnetfeld gefangene Teilchen

Die Gyrationsbewegung verhindert, daß die Teilchen senkrecht zu den magnetischen Feldlinien entweichen können. Man kann auf diese Weise versuchen, ein Plasma in ein Magnetfeld wie in ein Gefäß einzuschließen. Da die Teilchen längs der Feldlinien frei beweglich sind, muß man noch dafür sorgen, daß sie nicht längs der Feldlinien entweichen können. Das kann zum Beispiel dadurch geschehen, daß man die Feldlinien schließt, etwa indem man einen magnetischen Schlauch von der Form eines Torus herstellt. Dann hat man aber kein homogenes Magnetfeld mehr, und die Teilchen beschreiben keine einfache Gyrationsbewegung (vgl. § 3).

Aber auch sonst gibt es Probleme beim Einschließen geladener Teilchen in ein magnetisches Feld: Es ist nicht so, daß die Bewegung von geladenen Teilchen senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld unbedingt auf Raumgebiete mit den Abmessungen des Gyrationskreises beschränkt bleibt. Während ein stoßfreies Teilchen mit seinem Gyrationszentrum beliebig lange an eine Feldlinie eines homogenen Magnetfeldes gebunden ist, können stoßende Teilchen senkrecht zu den Feldlinien diffundieren. Bei jedem Stoß ändert ja das Teilchen seinen Impuls. Das führt zu einer Gyrationsbewegung auf einem anderen Kreisbogen. Ändert das Teilchen auch noch seine kinetische Energie, so ändert sich auch der Gyrationsradius (vgl. Abb. 2.2).

d) Gyrationsbewegung und kosmische Strahlung

Die kosmische Strahlung ist ein Strom von energiereichen geladenen Teilchen. Es handelt sich dabei hauptsächlich um Protonen, α -Teilchen und schwe-

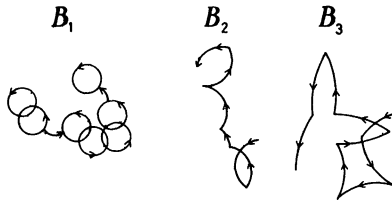


Abb. 2.2 Bewegung geladener Teilchen gleicher Ladung mit Stößen in verschieden starken homogenen Magnetfeldern (senkrecht zur Zeichenebene).

re Kerne mit Energien von etwa 10^9 bis 10^{18} eV ($= 10^{-3}$ bis 10^6 erg). Sie kommen aus allen Richtungen gleichmäßig auf die Erde. Es gelang bisher nicht, eine Bevorzugung der galaktischen Ebene oder des Zentrums der Milchstraße nachzuweisen. Das ist verwunderlich, wenn man annimmt, daß die Teilchen der kosmischen Strahlung in unserer Galaxis – etwa bei Supernova-Ausbrüchen – entstehen. Die Erklärung dafür ist, daß die Teilchen im Magnetfeld der Milchstraße in Gyrationenbahnen gefangen sind und schon längst ihre ursprüngliche Bewegungsrichtung verloren haben. Die Teilchen gyrieren und können sich nur längs der Feldlinien frei bewegen. Als Beispiel betrachten wir Elektronen und Protonen mit einer Geschwindigkeit von $v_{\perp} \approx 0.1 c$. (Bei diesen Teilchen müßte man eigentlich die Bewegungsgleichung (1.6) durch ihre relativistische Form ersetzen. Man müßte statt der Teilchenmasse die relativistische Masse nehmen. Mit der klassischen Näherung liegen wir in unserem Fall immer noch auch quantitativ auf Prozente genau richtig.) Bei einem galaktischen Magnetfeld von $B = 10^{-6}$ T erhält man für die Larmorradien $a_p = 3 \times 10^{11}$, $a_e = 1.7 \times 10^8$ cm. Das ist klein im Vergleich zur Dicke der Milchstraßenscheibe von 10^{21} bis 10^{22} cm.

Das erklärt aber noch nicht die Isotropie; da die Feldlinien längs der Spiralarme der Galaxie ausgerichtet sind, sollte die Tangentenrichtung des lokalen Spiralarms ausgezeichnet sein. Offensichtlich bewegen sich die Teilchen doch nicht frei entlang der Feldlinien, sondern werden gestreut, so daß die Vorzugsrichtung verlorengeht. Die Streuung kann nicht an Atomen stattfinden, denn die Energien der Teilchen sind so hoch, daß beim Stoß alle zusammengesetzten Atomkerne zerstört würden. Die Streuung geschieht vermutlich an Inhomogenitäten des Magnetfeldes. Diese bewirken auch, daß die Teilchen quer zum Magnetfeld driften und so langsam die Galaxie verlassen können (vgl. § 3). Man schätzt, daß jedes Teilchen im Mittel 10^8 Jahre im galaktischen Magnetfeld gefangen bleibt. In geradliniger Bahn würde ein Teilchen die Milchstraße in 10^4 Jahren verlassen.

e) Gyrationbewegung und zirkulare Polarisation

Die Gyrationbewegung der Elektronen gestattet es, Magnetfelder an den Oberflächen von Weißen Zwergen nachzuweisen. Die Gyrationbewegung prägt nämlich der von freien Elektronen ausgesandten Strahlung eine zirkulare Polarisation auf. Um das zu veranschaulichen, betrachten wir die Strahlung, die im Fall ohne Magnetfeld von freien Elektronen ausgesandt wird. Die Elektronen erfahren im Coulombfeld der Ionen eine Beschleunigung und strahlen dabei Energie ab (Bremsstrahlung).

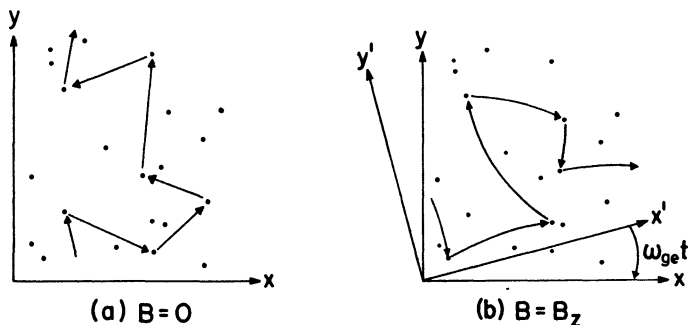


Abb. 2.3 Wegen der Stöße beschreiben die Elektronen auch im feldfreien Fall keine geradlinige Bahn, sondern einen Zick-Zack-Kurs. (In der Abb. (a) ist das übertrieben dargestellt, in Wirklichkeit überwiegen die schwachen Ablenkungen.) Bei Anwesenheit eines Magnetfeldes werden die Bahnstücke zwischen zwei Stößen zu Kreisbögen (Abb. (b)). In einem mit ω_{ge} rotierenden Bezugssystem dagegen beschreiben die Elektronen wieder gerade Bahnen (nach Kemp 1970).

Wegen der Stöße an den Ionen beschreiben die Elektronen im Magnetfeldfreien Raum einen statistischen Zick-Zack-Kurs. Bei jedem Stoß werden die Teilchen in irgendeiner Weise beschleunigt; das hat die Emission linear polarisierte Wellenzüge zur Folge (Bremsstrahlung). Die Polarisationsrichtung ist mit der Richtung der Beschleunigung, die das Elektron erfährt, korreliert. Da alle Richtungen gleich wahrscheinlich vorkommen, überlagern sich die Wellenzüge zu normalem, unpolarisiertem Licht (Abb. 2.3 a). Um die Strahlungsleistung eines Elektrons auf seiner Zick-Zack-Bahn zu bestimmen, muß man die Bahnbewegung in Fourierkomponenten zerlegen und für jede Frequenz ω des Fourier-Spektrums die Abstrahlung bestimmen. Das Ergebnis ist ein Emissionsspektrum, wie es in Abb. 2.4 dargestellt ist. Der dabei auftretende Parameter τ ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen. (Daß die Strahlungsleistung für hohe Frequenzen konstant und damit die Gesamtabstrahlung unendlich wird, liegt an der vereinfachenden Annahme, daß die Ablenkung diskontinuierlich erfolgt. Dadurch werden die hohen Frequenzen bevorzugt.

Das spielt aber für das Folgende keine Rolle.) Zusammenfassend können wir also sagen, daß man ein kontinuierliches Emissionsspektrum erhält, das nicht polarisiert ist.

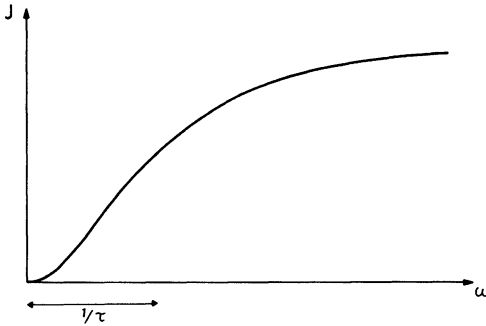


Abb. 2.4 Leistung der durch Elektronenstöße erzeugten Bremsstrahlung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Wie ist es jetzt, wenn wir ein homogenes Magnetfeld haben, dessen Feldlinien parallel zur Beobachtungsrichtung liegen? Dann sind die Bahnen der Elektronen zwischen zwei Stößen nicht mehr geradlinig; die Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen von verschiedenen Radien. Ihre Winkelgeschwindigkeit ist dabei gleich der Gyrationfrequenz ω_{ge} . Es ist jetzt nicht einfach zu sehen, welche Wirkung die Bahnkrümmung auf das ausgesandte Licht hat. (Abb. 2.3 b).

Es gibt aber einen einfachen Trick. Wir setzen den Beobachter zunächst in ein rotierendes Koordinatensystem, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{ge} um eine zum Magnetfeld parallele Achse rotiert. Für ihn verschwinden alle Bahnkrümmungen, er sieht wieder Elektronen mit geradlinigen Bahnen, wie in Abb. 2.3 a dargestellt. Dementsprechend beobachtet er linear polarisierte Wellenzüge, gleich verteilt in alle Richtungen. Er beobachtet unpolarisiertes Licht mit einer Frequenzverteilung wie in Abb. 2.4. Was findet aber ein ruhender Beobachter? Das wird klar, wenn man einen einzelnen linear polarisierten Wellenzug betrachtet. Man kann sich ihn zusammengesetzt denken aus zwei gegenläufig zirkular polarisierten Wellenzügen. Die elektrischen Vektoren dieser beiden Wellenzüge rotieren in einer zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und $-\omega$; so sieht es der rotierende Beobachter. Gehen wir jetzt in ein ruhendes Koordinatensystem, dann rotieren die beiden zirkular polarisierten Bestandteile unseres linear polarisierten Wellenzuges mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega - \omega_{ge}$, $-\omega - \omega_{ge}$. Hatte man vorher zwei gleichartige zirkulare Komponenten des Wellenzuges erhalten, so hat man

jetzt – als Folge des Magnetfeldes – zwei Komponenten verschiedener Frequenz.

Wenn nun der ruhende Beobachter alle zirkular polarisierten Wellenzüge mißt, die er bei der Frequenz ω empfängt, dann stammen die Wellen mit $+\omega$ von den Wellenzügen, die im rotierenden System die Frequenz $\omega - \omega_{ge}$ hatten, die Wellen mit $-\omega$ kommen dagegen von solchen mit der Frequenz $-\omega - \omega_{ge}$ im rotierenden System. Da im rotierenden System zu verschiedenen Frequenzbeträgen auch verschiedene Intensitäten gehören, haben die vom Beobachter gemessenen zirkular polarisierten Komponenten der Frequenzen $\pm \omega$ nicht dieselbe Amplitude. Sie können sich also nicht kompensieren, es bleibt ein zirkular polarisierter Rest übrig. Dieser ist proportional zur Feldstärke.

Dieser Effekt wurde im Dezember 1969 von J. C. Kemp vorausgesagt (Kemp 1970). Im Juli 1970 wurde die zirkulare Polarisation zum ersten Mal im Licht eines Weißen Zwerges gefunden (Kemp, Swedlund, Landstreet, Angel 1970). Die Polarisationsmessungen lassen auf eine magnetische Feldstärke von 10^7 Gauß an der Oberfläche des Weißen Zwerges schließen. Inzwischen hat man die zirkulare Polarisation bei mehreren Weißen Zwergen nachweisen können, die Feldstärke war dort mit 10^6 Gauß nicht ganz so hoch (Angel, Landstreet 1971 a). Es wurden auch periodische Veränderungen der zirkularen Polarisation beobachtet (Angel, Landstreet 1971 b), die man als Folge der Rotation des Weißen Zwerges interpretiert (Periode ≈ 1.3 Tage). Inzwischen ist das Kempsche Modell für Emission im Magnetfeld durch exakte quantenmechanische Rechnungen noch verbessert worden (Chanmugam et al. 1972).

§ 3. Driftbewegungen

Im Folgenden ergänzen wir die Betrachtungen über die Larmorbewegung. Wir lassen elektrische Felder, andere Kräfte und Inhomogenitäten des Magnetfeldes zu.

a) Elektrische Felder

Jetzt sei zusätzlich zum homogenen Magnetfeld noch ein konstantes elektrisches Feld vorhanden; der Einfachheit halber sei vorerst $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Die Bewegungsgleichung ist (Gl. (1.6))

$$(3.1) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Durch die Substitution

$$(3.2) \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

geht sie dann wegen der Identität

$$(3.3) \quad (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = -\mathbf{E} B^2$$

über in

$$(3.4) \quad m \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B}.$$

Diese Gleichung ist aber mit Gl. (2.1) identisch. Ihre Lösung ist die Larmor-rotation. Die Substitution (3.2) entspricht einer Transformation auf ein Bezugssystem, das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, denn $c \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ ist ein konstanter Geschwindigkeitsvektor.

Für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit

$$(3.5) \quad \mathbf{v}_D = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

bewegt, ist gemäß der Transformationsgleichung (1.4) das elektrische Feld wegtransformiert. Dementsprechend bewegen sich für ihn die geladenen Teilchen wie im Fall $\mathbf{E} = 0$, also auf Kreisbahnen. Dabei sind Frequenz und Radius durch unsere alten Gleichungen (2.4), (2.11) gegeben. Im ursprünglichen Bezugssystem, in dem das Feld \mathbf{E} gemessen wird, überlagert sich also zur Kreisbewegung noch eine Drift des Gyrationenzentrums mit der Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D . In die Gleichung (3.5) für die Driftgeschwindigkeit gehen m und q nicht ein. Daher driften Elektronen und Ionen mit gleicher Geschwindigkeit in dieselbe Richtung.

Gyration und Drift überlagern sich zu einer Schleifenbahn, wie sie in Abb. 3.1 dargestellt ist.

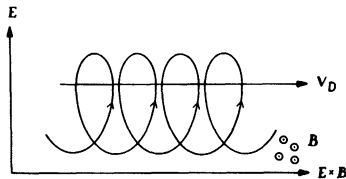


Abb. 3.1 Die aus Überlagerung von Gyration und Drift entstehende Schleifenbahn im Fall gekreuzter Felder. Das Magnetfeld tritt senkrecht aus der Zeichenebene heraus (angedeutet durch kleine Kreise mit Mittelpunkt – den Blick auf eine Pfeilspitze symbolisierend). Die Schleifenbahn liegt in der Zeichenebene.

Wenn \mathbf{E} noch eine Komponente parallel zu \mathbf{B} besitzt, wird der Fall nicht wesentlich schwieriger. Man überzeugt sich leicht, daß nach wie vor Gl. (3.5) die Drift des Gyrationenzentrums senkrecht zum Magnetfeld gibt, während das Gyrationenzentrum gleichzeitig parallel zum Magnetfeld die Beschleunigung $q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})/mB$ erfährt.

b) Gravitationsfeld

Die obige Betrachtung über die Kraftwirkung eines elektrischen Feldes läßt sich auf den Fall anderer, zusätzlich wirkender Kräfte ausdehnen. Wir betrachten als Beispiel geladene Teilchen im homogenen Magnetfeld, die noch unter dem Einfluß eines homogenen Gravitationsfeldes stehen mögen. Der Vektor \mathbf{g} der Schwerebeschleunigung stehe senkrecht auf \mathbf{B} . Das elektrische Feld möge verschwinden. In der Bewegungsgleichung (2.1) kommt nun noch die Schwerkraft hinzu:

$$(3.6) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Das neue Glied $m\mathbf{g}$ hat dieselbe Form wie das vom elektrischen Feld herrührende Glied in Gl. (3.1): statt $q\mathbf{E}$ steht jetzt $m\mathbf{g}$. Dementsprechend führt die Transformation

$$(3.7) \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{c m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

die Gl. (3.6) über in Gl. (3.4).

Die Driftgeschwindigkeit ergibt sich daraus zu

$$(3.8) \quad \mathbf{v}_D = \frac{c m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Sie ist also ladungs- und massenabhängig.

Wegen der Ladungsabhängigkeit führt die Drift in einem Plasma zu einem Strom (Abb. 3.2).

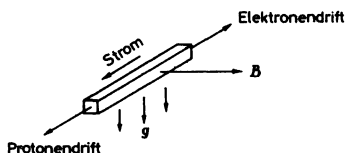


Abb. 3.2 Die ladungsabhängige Drift in einem Schwerefeld führt zu einem Strom im Plasma.

Hier zeigt sich, wie kompliziert in Wahrheit in einem Plasma die Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Feldern sind. Der durch die Drift der Teilchen erzeugte Strom erzeugt wieder ein Magnetfeld, das wiederum die Bewegung der Teilchen beeinflusst. In diesem Kapitel stellen wir uns noch auf den einfachen Standpunkt, daß unsere geladenen Teilchen nur Probesteilchen sind, das heißt, wir fragen, wie sie sich in vorgegebenen Feldern verhalten und nicht, welche Felder von ihnen wiederum erzeugt werden. Das ist sicher richtig, wenn die Teilchendichte hinreichend niedrig ist. In den späteren Kapiteln werden wir uns dann mit dem vollen Problem der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feldern befassen.

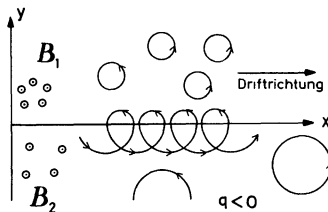


Abb. 3.3 Teilchenbahnen im Fall zweier aneinander grenzender homogener Magnetfelder verschiedener Stärke. In jeder Halbebene sind die Bahnen Kreise oder Kreisbögen. Der Einfachheit halber sind nur Teilchen gleicher Energie gezeichnet; Teilchen, deren Bahnen die Diskontinuitätsfläche $y = 0$ überschreiten, führen eine Driftbewegung aus.

c) Inhomogene Magnetfelder

Auch Gradienten im Magnetfeld führen zu einer ladungsabhängigen Drift der gyrierenden Teilchen. Wir veranschaulichen das mit einem sehr einfachen Beispiel. Unser inhomogenes Magnetfeld sei unstetig aus zwei homogenen Feldern zusammengesetzt. In einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z sei

$$(3.9) \quad E = 0, \quad B = (0, 0, B) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} B = B_1 = \text{const. für } y > 0 \\ B = B_2 = \text{const. für } y < 0 \end{cases}$$

mit $B_2 < B_1$. Teilchenbahnen, die ganz in dem einen oder dem anderen Halbraum verlaufen, sind wie bisher einfache Kreise. Anders ist es dagegen mit Teilchenbahnen, welche die Trennebene zwischen den beiden Halbräumen durchstoßen. Der einfachste Fall ist in Abb. 3.3 dargestellt. Ein gyrierendes Teilchen, das die Ebene senkrecht durchstößt, beschreibt in den beiden Halbräumen Halbkreise verschiedener Radien und bewegt sich dadurch entlang der Trennebene. Die Driftrichtung ist ladungsabhängig; sie ist senkrecht zu der Richtung, in der sich das Feld ändert. Ohne Beweis geben wir hier die Lösung

für die Driftgeschwindigkeit des Gyrationenzentrums für den Fall eines differenzierbaren inhomogenen Magnetfeldes an. Unter der Voraussetzung, daß sich das Magnetfeld über die Länge eines Gyrationradius nicht wesentlich ändert, d.h., daß

$$(3.10) \quad |a \nabla B| \ll B$$

gilt, beträgt die Driftgeschwindigkeit (Alfvén 1950)

$$(3.11) \quad \mathbf{v}_D = \frac{c \mu}{q B^2} \mathbf{B} \times \nabla B.$$

Dabei ist $\mu = m v_{\perp}^2 / 2B$ das magnetische Moment, eine Größe, die in unserem Feld während der Bewegung konstant bleibt. Das magnetische Moment spielt für die Bewegung von Teilchen im inhomogenen Magnetfeld noch eine wichtige Rolle (§ 6).

Der von uns qualitativ behandelte Grenzfall eines unstetigen Parallelfeldes ist in Gl. (3.11) enthalten.

§ 4. Geladene Teilchen in axialsymmetrischen Magnetfeldern

Im letzten Paragraphen betrachteten wir hauptsächlich die Bewegung von geladenen Teilchen in homogenen Magnetfeldern; in beliebigen Feldern werden die Bahnen jedoch recht kompliziert. Weitere einfache Aussagen über die Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld kann man aber bei axialsymmetrischen Feldern gewinnen.

a) Axialsymmetrische Magnetfelder

Wir benutzen Zylinderkoordinaten (s, φ, z) :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x &= s \cos \varphi, \\ y &= s \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Dann gilt für ein beliebiges skalares Feld ϕ und ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{A}

$$(4.2) \quad \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{1}{s} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right),$$

$$(4.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(4.4) \quad \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z}, \frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s}, \frac{1}{s} \frac{\partial (s A_{\varphi})}{\partial s} - \frac{1}{s} \frac{\partial A_s}{\partial \varphi} \right).$$

Es sei $\mathbf{B} = (B_s, B_\varphi, B_z)$, wobei wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie die drei Komponenten nur von s und z abhängen. Ist $B_\varphi = 0$, so heißt das Feld *meridional*; oft nennt man es auch *poloidal*. Sind $B_s = 0$ und $B_z = 0$, so heißt das Feld *toroidal*.

Zur Beschreibung eines axialsymmetrischen Magnetfeldes braucht man nicht alle drei Komponenten des Vektors \mathbf{B} anzugeben; es genügen vielmehr zwei skalare Funktionen, um das Feld zu charakterisieren. Um das zu sehen, sei ein meridionales Feld $\mathbf{B} = (B_s, 0, B_z)$ gegeben. Allgemein kann man für ein axialsymmetrisches Feld eine *Flußfunktion* $F(s, z)$ definieren durch

$$(4.5) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^s B_z(s', z) s' d\varphi ds' \doteq 2\pi \int_0^s B_z(s', z) s' ds' = -2\pi F(s, z).$$

Daraus folgt

$$(4.6) \quad F(s, z) = - \int_0^s B_z(s', z) s' ds'.$$

Es ist $-2\pi F(s, z)$ der Fluß in z -Richtung durch eine Kreisscheibe vom Radius s , die senkrecht auf der durch ihren Mittelpunkt gehenden z -Achse steht.

Aus Gl. (4.6) folgt durch Differentiation nach s :

$$(4.7) \quad B_z = - \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt aus Gl. (4.3) mit Gl. (4.7):

$$(4.8) \quad \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s B_s) = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}$$

und daraus durch Integration

$$(4.9) \quad B_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{s} c(z).$$

Da wir Felder ohne Singularitäten betrachten wollen, müssen wir $c(z) = 0$ setzen. Also

$$(4.10) \quad B_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Damit haben wir ein meridionales axialsymmetrisches, auf der Achse reguläres Magnetfeld durch die Flußfunktion F dargestellt:

$$(4.11) \quad \mathbf{B} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial z}, 0, -\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} \right).$$

Aus Gl. (4.2) und 4.7) folgt:

$$(4.12) \quad \mathbf{B} \cdot \nabla F = 0,$$

d.h., die Vektoren \mathbf{B} sind Tangentialvektoren an die Linien $F = \text{const.}$ Die Linien $F = \text{const.}$ sind also *Feldlinien*.

Bezeichnen wir die φ -Komponente mit G , so hat \mathbf{B} die Form

$$(4.13) \quad \mathbf{B} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial z}, G, -\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} \right).$$

Zur Beschreibung des axialsymmetrischen Magnetfeldes braucht man also nur zwei Funktionen $F(s, z)$ und $G(s, z)$. Die Beziehung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ist dann automatisch erfüllt.

Für das Folgende nehmen wir an, daß das Magnetfeld in der Form (4.13) gegeben sei.

b) Integrale der Bewegung

Es sei $\mathbf{E} = 0$; die kinetische Energie der Teilchen bleibe also konstant. Außerdem sei das Magnetfeld wie in allen bisher behandelten Fällen zeitunabhängig. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$(4.14) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Mit Gl. (4.13) ergibt sich für die φ -Komponente:

$$(4.15) \quad m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\varphi = \frac{q}{c} \left(\frac{v_z}{s} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{v_s}{s} \frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{q}{cs} \mathbf{v} \cdot \nabla F.$$

Bei zeitlich konstanten Feldern ist

$$(4.16) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

und damit

$$(4.17) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = \mathbf{v} \cdot \nabla F.$$

Dabei ist dF/dt die zeitliche Änderung der Funktion F , die das mit der Geschwindigkeit v fliegende Teilchen erlebt, also die substantielle Zeitableitung.

Also folgt aus Gl. (4.15)

$$(4.18) \quad m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\varphi = \frac{q}{c s} \frac{dF}{dt}.$$

Aber auch die linke Seite dieser Gleichung läßt sich als eine substantielle Zeitableitung schreiben. Es ist nämlich

$$(4.19) \quad s \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\varphi = \frac{d}{dt} (s v_\varphi).$$

B e w e i s :

Es sei r der Ortsvektor, gemessen von einem beliebigen Punkt auf der z -Achse. Weiterhin seien e_φ , e_z die Einheitsvektoren in φ - bzw. in z -Richtung. Wie man sich anhand von Abb. 4.1 überlegen kann, gilt dann

$$(4.20) \quad s e_\varphi = e_z \times r.$$

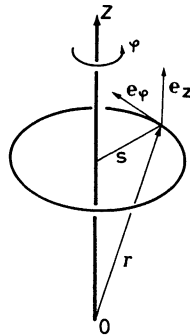


Abb. 4.1 Zur Veranschaulichung der Gleichung (4.20). Das Vektorprodukt von e_z mit r zeigt in die Richtung von e_φ und hat die Länge s .

Multipliziert man Gl. (4.20) skalar mit \mathbf{v} , so erhält man

$$(4.21) \quad s v_\varphi = (e_z \times r) \cdot \mathbf{v}.$$

Wird diese Gleichung nach t abgeleitet, so folgt

$$(4.22) \quad \frac{d}{dt} (s v_\varphi) = (e_z \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + (e_z \times r) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = s \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_\varphi,$$

wie oben in Gl. (4.19) behauptet.

Aus Gl. (4.18) und (4.19) folgt dann.

$$(4.23) \quad \frac{mc}{q} \frac{d}{dt} (s v_\varphi) = \frac{dF}{dt}$$

und hieraus durch Integration

$$(4.24) \quad s v_\varphi - \frac{q}{mc} F(s, z) = \text{const.}$$

Damit haben wir ein *Integral der Bewegung* gefunden. Ein anderes Integral der Bewegung kennen wir schon von früher: der Energiesatz besagte ja, daß in unserem Fall v^2 konstant ist. Die beiden Integrale der Bewegung sind also

$$(4.25) \quad I_1 = s v_\varphi - \frac{q}{mc} F(s, z),$$

$$(4.26) \quad I_2^2 = v^2.$$

Wie immer sich unser Teilchen bewegen will, es darf an jeder Stelle des Raumes nur solche Geschwindigkeiten annehmen, daß I_1 und I_2 längs der ganzen Bahn dieselben Zahlenwerte haben. $m I_1$ heißt der *verallgemeinerte Drehimpuls*, $\frac{m}{2} I_2^2$ ist die Energie. In der Mechanik sind bei der Bewegung eines Teilchens in einem axialsymmetrischen Schwerfeld Drehimpuls und Energie konstant. Ist ψ_s das Potential des Feldes, dann sind

$$(4.27) \quad M_1 = s v_\varphi,$$

$$(4.28) \quad M_2 = v^2 - \frac{2}{m} \psi_s$$

Integrale der Bewegung. Im mechanischen Fall geht das Feld in das Energieintegral M_2 ein, in unserem Fall aber in das Drehimpulsintegral I_1 .

In § 5 werden wir die beiden hier gefundenen Integrale der Bewegung benutzen, um neue Aussagen über die Bewegung geladener Teilchen in axialsymmetrischen Feldern zu machen.

§ 5. Erlaubte und verbotene Gebiete

Ein axialsymmetrisches Magnetfeld besitze die Flußfunktion $F(s, z)$. Wir betrachten ein geladenes Teilchen, das sich in diesem Feld bewegt, und seine beiden Integrale der Bewegung I_1, I_2 . Die Bewegung wird im allgemeinen recht kompliziert aus Gyration und zeitabhängiger Drift zusammengesetzt

sein, und es erscheint deshalb von vornherein schwer, Aussagen über die Bahn zu machen. Trotzdem gibt es dank der Existenz der beiden Integrale die Möglichkeit, nachzuweisen, daß das Teilchen gewisse Stellen des Raumes niemals erreichen kann. Wir werden im folgenden sogar eine geometrische Konstruktionsvorschrift angeben, nach der man die für ein geladenes Teilchen *verbotenen Gebiete* des Raumes bestimmt (Fisser, Kippenhahn 1959).

a) Erlaubte und verbotene Gebiete in der Bildebene

Dazu bilden wir die Punkte (s, z) der Meridianebene in eine neue Ebene ab. Deren Ordinate sei qF/mc , die Abszisse sei s . Da zu jedem Punkt (s, z) der Meridianebene eindeutig ein Wert $F(s, z)$ der Flußfunktion gehört, ist die Abbildung eindeutig. Die neue Ebene nennen wir die *Bildebene*. Der Bahn des Teilchens in der Meridianebene entspricht nun auch eine *Bildbahn* in der Bildebene. Wie wir gleich sehen werden, sind die verbotenen Gebiete in der Bildebene von besonders einfacher geometrischer Gestalt.

Aus Gl. (4.25) und (4.26) folgt:

$$(5.1) \quad v_{\varphi}^2 = \frac{1}{s^2} \left(I_1 + \frac{q}{mc} F \right)^2,$$

$$(5.2) \quad v^2 = I_2^2.$$

Wegen $v^2 \geq v_{\varphi}^2$ ergibt sich damit

$$(5.3) \quad s^2 I_2^2 - \left(I_1 + \frac{q}{mc} F \right)^2 \geq 0$$

oder

$$(5.4) \quad \left(I_1 + \frac{q}{mc} F \right)^2 \leq s^2 I_2^2.$$

Nur dort, wo diese Bedingung erfüllt ist, kann sich das Teilchen aufhalten. Damit folgt, daß die Grenze zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten durch ein Geradenpaar in der Bildebene dargestellt wird:

$$(5.5) \quad I_1 + \frac{q}{mc} F = \pm s I_2.$$

Wo ist nun das *erlaubte* Gebiet? Wenn man den Fluß F festhält und s gegen Unendlich gehen läßt, so liegt gemäß Gl. (5.4) für hinreichend große s das Wertepaar $(qF/mc, s)$ im erlaubten Gebiet. Daraus schließen wir, daß der in Abb. 5.1 von den beiden Geraden (5.5) eingeschlossene Zwickel mit dem Öffnungswinkel $2 \arctan I_2$ die erlaubten Wertepaare $(qF/mc, s)$ enthält. Das Innere des Zwickels ist also das erlaubte Gebiet.

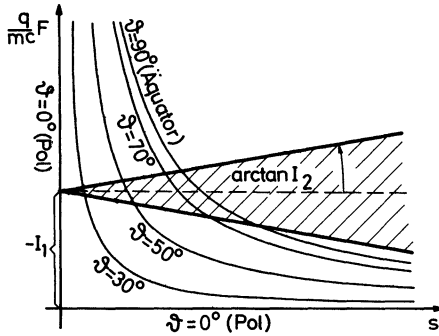


Abb. 5.1 Durch $F = F(s, z)$ läßt sich jedem Punkt (s, z) der Meridianebene ein Punkt im obigen Diagramm zuordnen. Die Ebene des Diagramms ist ein verzerrtes Bild der Meridianebene. Hier ist die Abbildung für den in b) behandelten Fall des Dipolfeldes angegeben. Ein Teilchen, das die Integrale I_1, I_2 besitzt, kann nur Raumpunkte erreichen, deren Bilder in dem schraffierten Gebiet liegen.

b) Das Dipolfeld

Als Beispiel betrachten wir das Feld eines magnetischen Dipols. Sein Potential läßt sich in der Form

$$(5.6) \quad \phi_D = -M \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

schreiben. Dabei ist M das magnetische Dipolmoment (in Gauß cm^3), und ϑ bezeichnet den Winkel zwischen dem Ortsvektor und der z -Achse. Mit

$$(5.7) \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{s^2 + z^2}} \quad ; \quad \sin \vartheta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

bekommen wir das Potential in Zylinderkoordinaten:

$$(5.8) \quad \phi_D = -M \frac{z}{(s^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Die z -Komponente des Feldes errechnet sich dann nach $\mathbf{B} = -\nabla \phi_D$ zu

$$(5.9) \quad B_z = -\frac{\partial \phi_D}{\partial z} = M \frac{s^2 - 2z^2}{(s^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Wir haben in Gl. (5.6) das Vorzeichen des Potentials so gewählt, daß für $s \rightarrow 0$ und $z > 0$ B_z negativ wird (für $M > 0$), das entspricht beispielsweise den Verhältnissen auf der Nordhalbkugel der Erde.

Schließlich lautet dann die Flußfunktion des Dipolfeldes

$$(5.10) \quad F = M \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sin^3 \vartheta}{s},$$

wie man leicht durch Nachprüfung der Relation

$$(5.11) \quad B_z = -\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s}$$

erkennt. Die Flächen $\vartheta = \text{const.}$ sind Kegel im Raum:

$$(5.12) \quad \frac{s}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \text{const. bzw. } s^2 = \text{const. } z^2.$$

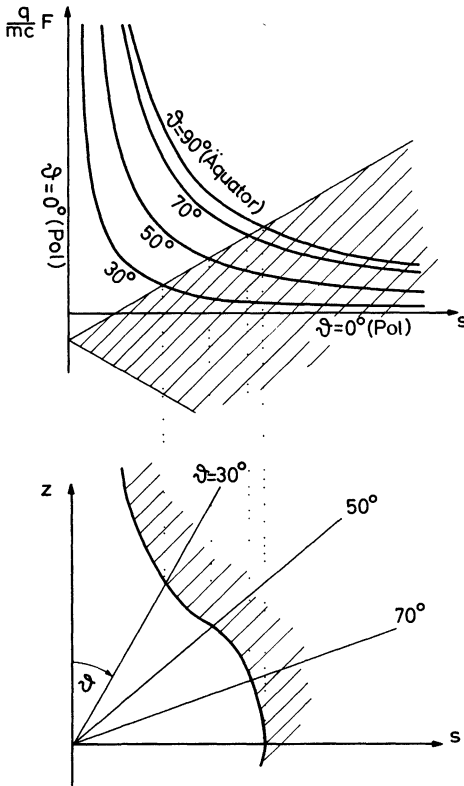


Abb. 5.2 Die Konstruktion erlaubter und verbotener Gebiete mit Hilfe des $q F/mc$ - s -Diagramms für ein Dipolfeld. Teilchen, mit den in dieser Abbildung gewählten Parametern I_1 und I_2 , können nicht beliebig nahe an den Koordinatensursprung herankommen. An den Grenzflächen müssen die Teilchen in φ -Richtung laufen, da dort $|v| = |v_\varphi|$ ist.

Aus Gl. (5.10) entnimmt man, daß diese Kegel in die Linien $F = \text{const.}/s$ der Bildebene übergehen. In der Bildebene entsprechen also den Linien $\vartheta = \text{const.}$ verzerrte Hyperbeln. Der Polrichtung in der Meridianebene ($\vartheta = 0$) entsprechen die Achsen der Bildebene. Wegen der Spiegelsymmetrie des Dipolfeldes können wir uns auf ϑ -Werte im Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ beschränken. Abb. 5.2 zeigt in der oberen Hälfte die Bildebene zusammen mit einigen Linien $\vartheta = \text{const.}$ Darunter ist die Meridianebene so gezeichnet, daß man jeden Punkt des das erlaubte vom verbotenen Gebiet trennenden Geradenpaares punktweise nach unten projizieren und auf diese Weise in der Meridianebene eine Trennlinie konstruieren kann. Das erlaubte Gebiet ist durch Schraffur gekennzeichnet.

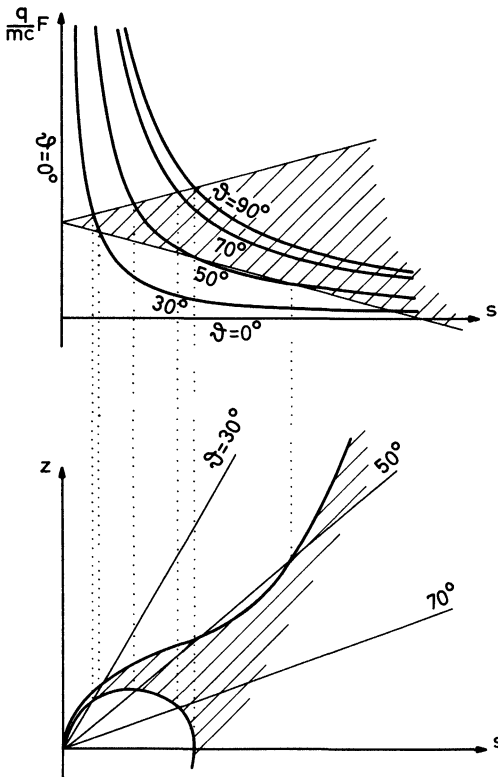


Abb. 5.3 In diesem Fall können aus dem Unendlichen kommende Teilchen beliebig nahe zum Dipol vordringen. Man sieht, daß diese geladenen Teilchen nur bei bestimmten geographischen Breiten auf die Erdoberfläche herunterkommen können. Das ist der Grund dafür, daß die Polarlichter nur in Zonen bestimmter geographischer Breite (den Polarlichtzonen) beobachtbar sind.

net, das verbotene ist weiß gelassen. In den Bildern 5.3 und 5.4 sind Konstruktionen für andere Wertepaare I_1, I_2 gegeben. Man erkennt daraus, daß je nach Wahl der Werte von I_1, I_2 topologisch ganz verschiedene Gebietsformen entstehen können.

Als Anregung zur Konstruktion von erlaubten und verbotenen Gebieten ist in Abb. 5.5 das Bilddiagramm für das Magnetfeld eines Kreisstromes dargestellt. Eingezeichnet sind die Bilder der Linien $z = \text{const.}$ der Meridianebene.

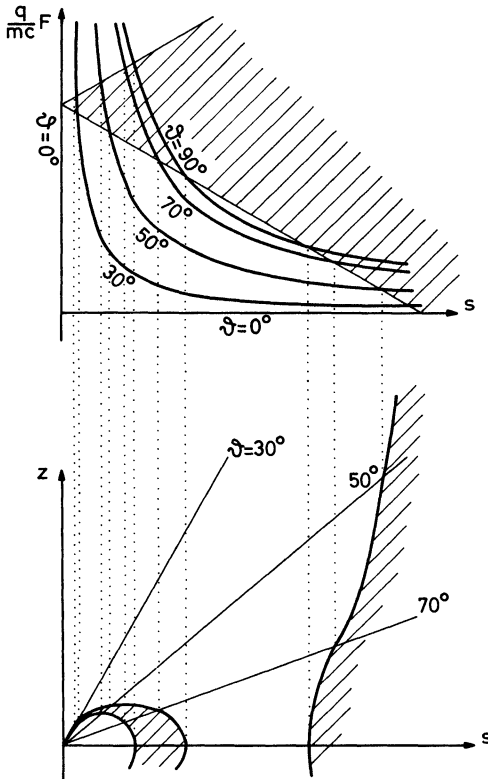


Abb. 5.4 Bei dieser Wahl der Parameter I_1 und I_2 können gewisse Teilchen aus dem Unendlichen wieder nicht beliebig nahe an den Dipol vordringen. Andere Teilchen mit demselben verallgemeinerten Drehimpuls und derselben kinetischen Energie sind in einer Zone nahe beim Dipol gefangen! Diese Teilchen bilden die weiter unten noch zu besprechenden Strahlungsgürtel der Erde (Van-Allen-Gürtel).

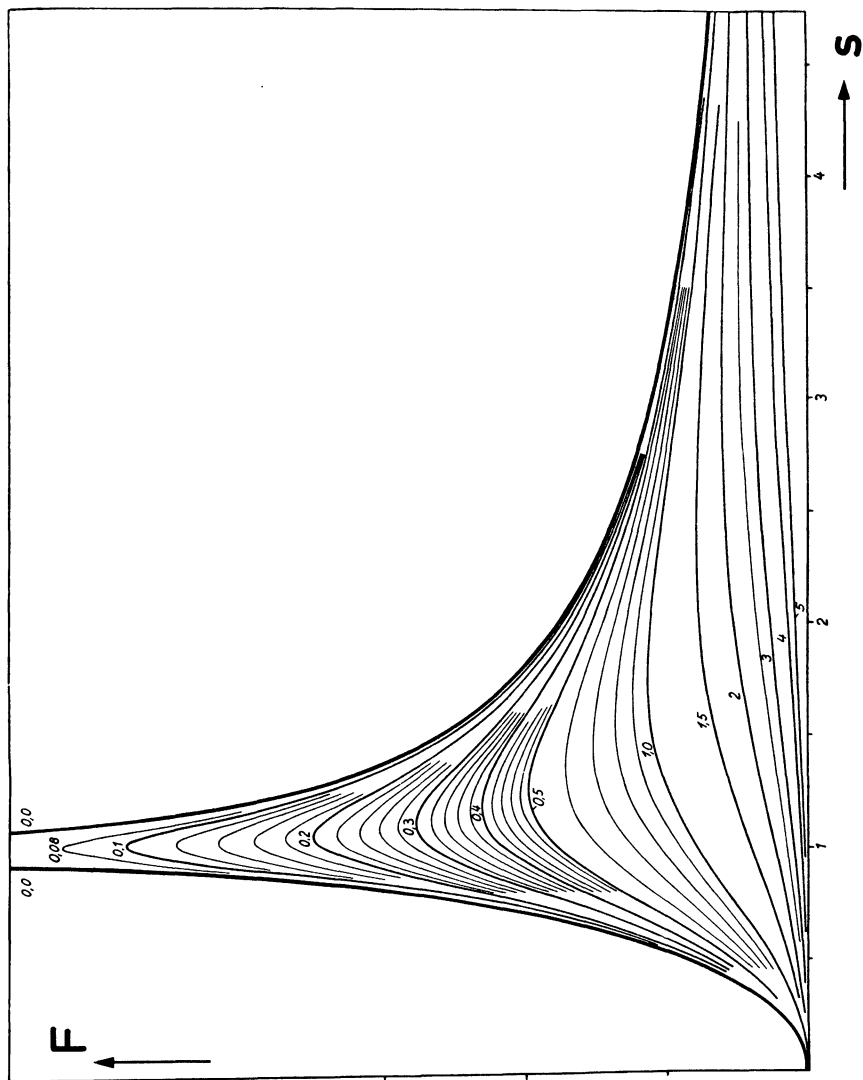


Abb. 5.5 Das Bilddiagramm für das Magnetfeld eines Kreisstromes, der die Meridianebene bei $s = 1, z = 0$ durchstößt (nach Fisser, Kippenhahn 1959). Die Bildpunkte der Meridianebene liegen in dem von der dicken Kurve berandeten Gebiet der Bildebene. In diesem Gebiet sind Linien $z = \text{const.}$ eingezeichnet, z ist als Parameter angeschrieben.

§ 6. Das magnetische Moment

Im letzten Paragraphen betrachteten wir die Gebiete in einem axialsymmetrischen Magnetfeld, die für ein vorgegebenes, geladenes Teilchen erlaubt sind. Man kann jedoch noch mehr aussagen über die Bewegung geladener Teilchen in beliebigen inhomogenen Magnetfeldern. Dazu verhilft uns der Begriff des *magnetischen Moments* eines gyrierenden Teilchens.

a) Die Konstanz des magnetischen Moments

Wir betrachteten die Bahn eines Teilchens, das in einem homogenen, langsam zeitlich veränderlichen (dabei aber stets homogen bleibenden) Magnetfeld $\mathbf{B}(t)$ gyriert. In die folgenden Betrachtungen geht eine eventuelle Parallelkomponente v_{\parallel} der Geschwindigkeit nicht ein; wir nehmen also an, das Teilchen gyriere mit der Geschwindigkeit v_{\perp} in einer zur Feldrichtung senkrechten Ebene.

Wenn sich das Feld mit der Zeit ändert, dann bleibt die kinetische Energie des Teilchens nicht mehr konstant. Wegen $\dot{\mathbf{B}} \neq 0$ und $c \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ wirkt ein elektrisches Feld, welches das Teilchen beschleunigt. Wenn $\mathbf{B}(t)$ in z -Richtung zeigt, liegt die Bahnebene des Teilchens in der x - y -Ebene, und es gilt

$$(6.1) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E})_z d\sigma = -\frac{1}{c} \int \dot{B} d\sigma = -\frac{\pi a^2}{c} \dot{B}.$$

Dabei ist $d\sigma$ das ungerichtete Element der von der Bahn umschlossenen Fläche, $d\mathbf{l}$ das Linienelement der Bahn, gemessen in mathematisch positiver Richtung (vgl. Abb. 6.1).

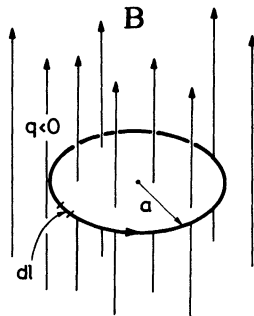


Abb. 6.1 Die zur Herleitung der Konstanz des magnetischen Moments betrachtete Bahn eines geladenen Teilchens.

Je nach dem Vorzeichen der Ladung spürt das Teilchen auf seiner Kreisbahn ein elektrisches Feld, das seine Bahngeschwindigkeit erhöht oder ver-

langsam. Mit Änderung der Komponente v_1 ändert sich dann auch der Larmorradius, anstatt der Kreisbahn erhalten wir eine Spirale. Wir nehmen das magnetische Feld als so langsam veränderlich an, daß das induzierte elektrische Feld während eines Umlaufes den Larmorradius nur wenig ändert. Die Änderung der kinetischen Energie während eines Umlaufs ist

$$(6.2) \quad \delta \left(\frac{m}{2} v_1^2 \right) = -|q| \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

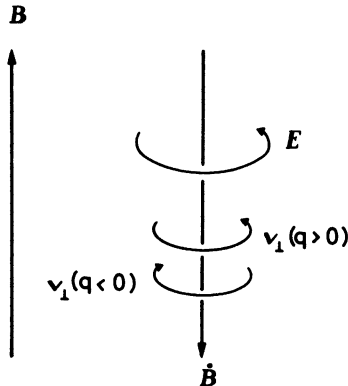


Abb. 6.2 Magnetfeld und Magnetfeldänderung zur Festlegung des Vorzeichens in Gl. (6.2).

Die Wahl des Vorzeichens in Gl. (6.2) überlegt man sich an Hand von Abb. 6.2: Wenn – wie gezeichnet – $\dot{\mathbf{B}}$ nach unten weist, zeigt \mathbf{E} in die mathematisch positive Richtung. Das Integral auf der rechten Seite von Gl. (6.2) ist also positiv, die Änderung der kinetischen Energie ist dann für Teilchen beider Ladungsvorzeichen negativ. Die Änderung der kinetischen Energie bei vorgegebenem $\dot{\mathbf{B}}$ ist also unabhängig von Ladungsvorzeichen und Masse.

Die Umlaufzeit ist

$$(6.3) \quad \tau = \frac{2\pi}{|\omega_g|}, \quad \omega_g = \frac{|q|B}{mc}.$$

Wir approximieren:

$$(6.4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v_1^2 \right) \approx \frac{\delta \left(\frac{m}{2} v_1^2 \right)}{\tau} = -|q| \cdot \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cdot \frac{\omega_g}{2\pi},$$

dabei wird angenommen, daß der Zuwachs an kinetischer Energie während der Zeit τ gleichmäßig erfolgt.

Aus Gl. (6.1) und (6.4) folgt schließlich

$$(6.5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) = \frac{\pi a^2}{c} \dot{B} |q| \frac{\omega_{\mathbf{g}}}{2\pi}.$$

Wir definieren nun das *magnetische Moment* μ :

$$(6.6) \quad \mu = \frac{\pi a^2}{c} \frac{|q| \omega_{\mathbf{g}}}{2\pi} = \frac{m}{B} \frac{v_{\perp}^2}{2}.$$

Gl. (6.5) läßt sich dann schreiben

$$(6.7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) = \mu \frac{dB}{dt}.$$

Aus der Definition von μ in Gl. (6.6) und aus Gl. (6.7) folgt

$$(6.8) \quad \frac{d\mu B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) = \mu \frac{dB}{dt},$$

daraus folgt aber

$$(6.9) \quad \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

μ ist also im Rahmen unserer Näherung eine Invariante der Bewegung!

Gl. (6.9) gilt immer, wenn das Magnetfeld innerhalb des Gyrationkreises hinreichend gut homogen und $|\dot{B}|$ hinreichend klein ist. Der Energiegewinn pro Umlauf muß so klein sein, daß man noch genähert Kreisbahnen hat.

Wir hatten bei der Herleitung von Gl. (6.9) ein homogenes Feld vorausgesetzt. Bei inhomogenen Feldern muß der Gyrationradius hinreichend klein sein, so daß B dem Teilchen während eines Gyrationsumlaufes genähert konstant erscheint. Dann ist Gl. (6.9) immer noch genähert richtig.

Nach Gl. (2.11) gilt

$$(6.10) \quad a^2 \sim \frac{v_{\perp}^2}{B^2}$$

und nach Gl. (6.6)

$$(6.11) \quad \mu \sim \frac{v_{\perp}^2}{B}.$$

Daraus folgt

$$(6.12) \quad a^2 \sim \frac{\mu}{B} \text{ oder } B a^2 = \text{const.}$$

Der Fluß durch die vom Gyrationradiusvektor überstrichene Fläche bleibt während der Änderung des Magnetfeldes konstant.

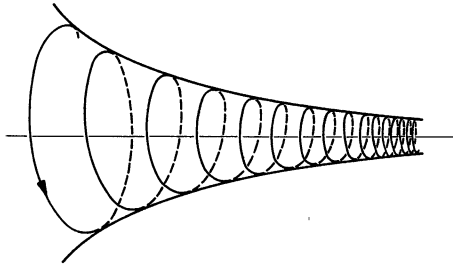


Abb. 6.3 Bewegung eines Teilchens auf einem nach rechts enger werdenden Feldlinienschlauch. Während seiner Bewegung umschließt das Teilchen immer dieselbe Anzahl von Feldlinien.

Das kann man auch übertragen auf die Bewegung eines Teilchens im zeitlich konstanten, räumlich inhomogenen Magnetfeld, wenn $v_{\parallel} \neq 0$ ist. Dann „erlebt“ das Teilchen eine zeitliche Änderung des Feldes. Der Fluß durch das Gyration-Kreisscheibchen bleibt dabei konstant. Das Teilchen bewegt sich also auf der Oberfläche eines *Feldlinienschlauches*, der durch den konstanten hindurchgehenden Fluß definiert ist (vgl. Abb. 6.3). Da das Magnetfeld zeitlich konstant ist, bleibt dann die kinetische Energie des Teilchens konstant, wegen der Konstanz des magnetischen Moments ändern sich aber $m v_{\perp}^2/2$ und $m v_{\parallel}^2/2$. Das ist für die folgenden Betrachtungen wichtig.

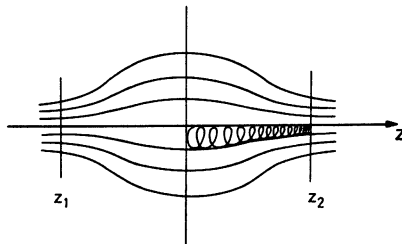


Abb. 6.4 Die magnetische Flasche. Man denke sich das Magnetfeld axialsymmetrisch um die z -Achse. In einem Feld von dieser Form kann man geladene Teilchen zwischen z_1 und z_2 gefangen halten.

b) Magnetische Flaschen

Eine Magnetfeldkonfiguration, wie in der Abbildung 6.4 gezeichnet, nennt man eine *magnetische Flasche*, da sie die Möglichkeit bietet, Teilchen gefangen zu halten. Dies kann man sich mit Hilfe des Energiesatzes veranschaulichen.

Die gesamte kinetische Energie eines Teilchens ist konstant

$$(6.13) \quad \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \text{const.}$$

oder mit Gl. (6.6)

$$(6.14) \quad \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 = \frac{m}{2} v^2 - \mu B.$$

Dabei wissen wir, daß μ genähert konstant ist. Aus Gl. (6.14) folgt, daß v_{\parallel} null wird, wenn B den Wert $m v^2 / 2\mu$ erreicht.

Es sei nun der Einfachheit halber eine magnetische Flasche gegeben, bei der B für festes z jeweils über dem Querschnitt konstant sei. Abb. 6.5 gibt B als Funktion von z wieder. Wenn ein Teilchen von der Mitte der Flasche aus nach rechts läuft, nimmt v_{\parallel} so lange ab, bis schließlich bei

$$(6.15) \quad \frac{m}{2} v^2 = \mu B$$

v_{\parallel} gleich null wird. Hier kann das Teilchen nicht weiter, seine gesamte kinetische Energie steckt in der Gyrationbewegung. Von diesem Punkt aus wird das Teilchen sogar in die Flasche zurück reflektiert: Die Komponente v_{\parallel} nimmt

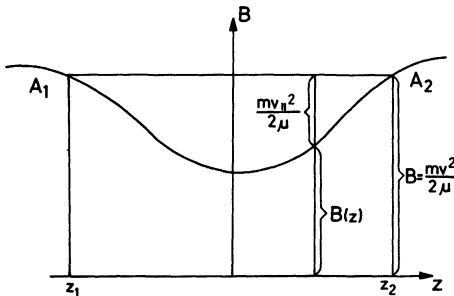


Abb. 6.5 Der Betrag B der magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit von z bei einer magnetischen Flasche. Bei der Bewegung eines Teilchens muß Gl. (6.14) gelten. An den Stellen z_1 und z_2 ist diese Gleichung nur mit $v_{\perp} = 0$ erfüllbar. Das Teilchen kann also nur zwischen den Stellen z_1 und z_2 hin und her pendeln.

wieder zu bis zum minimalen $B(z)$ -Wert, dann nimmt mit zunehmendem $B(z)$ die Komponente v_{\parallel} wieder ab, um wieder bei $\frac{m}{2} v^2 = \mu B$ zu verschwinden.

Die Punkte A_1, A_2 in Abb. 6.5 geben die Stellen z_1 und z_2 an, über die das Teilchen nicht hinausgelangen kann. Es pendelt also zwischen den Stellen z_1 und z_2 hin und her.

Abb. 6.5 erinnert an Darstellungen in der Mechanik, z.B. an den Oszillator, bei dem die potentielle Energie über der Entfernung von der Ruhelage aufgetragen ist. In unserem Falle tritt μB an die Stelle der potentiellen Energie, während $m v_{\parallel}^2/2$ die Stelle der kinetischen Energie einnimmt. Der Grundgedanke der Überlegungen ist in beiden Fällen gleich.

Wie kann man die Reflexion an den Umkehrpunkten verstehen? Wenn man die Verhältnisse dort genau betrachtet, sieht man, daß wirklich eine rücktreibende Kraft auftritt, die das Teilchen in die Flasche zurückwirft (Abb. 6.6).

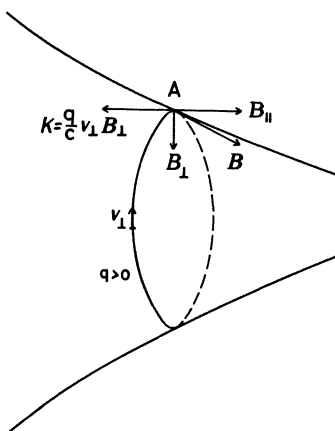


Abb. 6.6 Zur Reflexion geladener Teilchen am Umkehrpunkt.

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens positiver Ladung am Punkt A , wo v_{\perp} in die Zeichenebene hineinzeigt, und zerlegen das Magnetfeld B in eine Komponente B_{\perp} in der Gyrationsebene und eine Komponente B_{\parallel} senkrecht dazu; sie ist parallel zur z -Richtung. Wegen der Komponente B_{\perp} wirkt auf das Teilchen eine Lorentzkraft

$$(6.16) \quad K = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q}{c} v_{\perp} \cdot B_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z,$$

die das Teilchen in das Gebiet niedrigerer Feldstärke (also in die Flasche) zurücktreibt.

Es gibt Teilchen, die durch den Flaschenhals hindurch können; das sind z. B. solche, für die $\mu = 0$ ist, sie bewegen sich einfach längs der Feldlinien. Es gibt aber auch Teilchen, die nie durch den Flaschenhals können, nämlich die, welche in Abb. 6.5 bei den Stellen z_1, z_2 ihr v_{\parallel} aufgebraucht haben und von den in den Flaschenhals hinein konvergierenden Feldlinien zurückgeworfen werden. Welche Teilchen gehen durch, welche sind in der Flasche gefangen?

Wir betrachten zwei zur Achse senkrecht stehende Querschnitte 0 und 1 (vgl. Abb. 6.7). B sei auf den Querschnitten 0 und 1 jeweils konstant und habe dort die Werte B_0, B_1 . Weiterhin sei ϑ der Winkel zwischen der jeweiligen Bewegungsrichtung des Teilchens und der Achse des Feldes, ϑ legt also die Steigung der Gyrationsspirale fest.

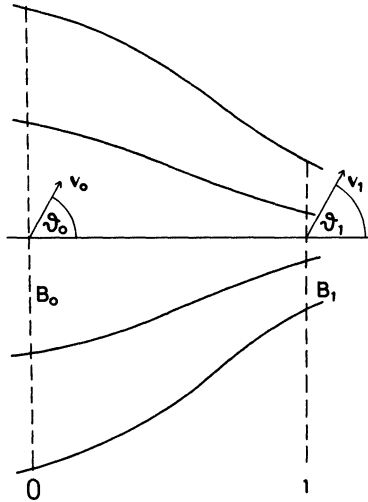


Abb. 6.7 Zur Herleitung der Bedingung für Reflexion.

Mit den Bezeichnungen in der Abb. 6.7 gilt dann:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} v_{\parallel 0} &= v_0 \cos \vartheta_0, & v_{\parallel 1} &= v_1 \cos \vartheta_1, \\ v_{\perp 0} &= v_0 \sin \vartheta_0, & v_{\perp 1} &= v_1 \sin \vartheta_1. \end{aligned}$$

Wir suchen jetzt nach einer Beziehung zwischen den Winkeln ϑ_0 und ϑ_1 . Wegen Gl. (6.6) und weil μ invariant ist, gilt

$$(6.18) \quad \mu = \frac{m}{2} \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{m}{2} \frac{v_0^2}{B_0} \sin^2 \vartheta_0 = \frac{m}{2} \frac{v_1^2}{B_1} \sin^2 \vartheta_1.$$

Wegen der Erhaltung der kinetischen Energie (I_2) ist dann $v_0^2 = v_1^2 = v^2$, also

$$(6.19) \quad \frac{\sin^2 \vartheta_0}{B_0} = \frac{\sin^2 \vartheta_1}{B_1} .$$

Für $v_{\parallel 1}$ haben wir dann

$$(6.20) \quad v_{\parallel 1}^2 = v^2 \cos^2 \vartheta_1 = v^2 (1 - \sin^2 \vartheta_1) = v^2 \left(1 - \frac{B_1}{B_0} \sin^2 \vartheta_0\right).$$

Wie groß muß nun der Winkel ϑ_0 sein, damit das Teilchen gerade noch bei 1 ankommt? Ist der Ausdruck in der Klammer in Gl. (6.20) positiv, so wird das Teilchen durchgelassen, ist er negativ, so kann es die Ebene 1 gar nicht erreichen. Wird der Klammerausdruck zu null, so wird dadurch ein Grenzwinkel ϑ_0^* definiert:

$$(6.21) \quad \sin^2 \vartheta_0^* = \frac{B_0}{B_1} .$$

Das ist die Bedingung für ϑ_0 dafür, daß das Teilchen gerade noch den Querschnitt 1 erreicht,

Teilchen mit $\vartheta_0 < \vartheta_0^*$ werden durchgelassen,

Teilchen mit $\vartheta_0 > \vartheta_0^*$ werden zurückgeworfen.

Gefangene Teilchen haben aber keine lebenslängliche Strafe abzubüßen, auch wenn für sie $\vartheta_0 > \vartheta_0^*$ ist. Durch Stöße können sie ihre Richtung und ihre Energie ändern, und im besonderen kann sich $m v_{\perp}^2 / 2$ und damit ihr magnetisches Moment verringern, dann werden sie vorzeitig aus der Flasche entlassen.

c) Adiabatische Invarianten

Größen wie das magnetische Moment, die bei langsamer (adiabatischer) Änderung der äußeren Bedingungen eines periodischen Vorganges konstant bleiben, nennt man *adiabatische Invarianten*. Das einfachste Beispiel dafür gibt das mathematische Pendel, dessen Fadenlänge l langsam geändert wird, so daß der relative Zuwachs der Länge pro Schwingung klein bleibt. Dann gilt für die Gesamtenergie des Pendels (vgl. z.B. Schaefer 1951):

$$(6.22) \quad U = 2 m g l \overline{(1 - \cos \varphi)} \approx 2 m g l \varphi^2 .$$

Dabei ist m die Masse des Pendels, g der Betrag der Erdbeschleunigung und φ der Auslenkungswinkel. U ist dabei so normiert, daß $U = 0$ ist im Fall des ruhenden Pendels. Unter Benutzung der Pendelfrequenz

$$(6.23) \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \sim l^{-1/2}$$

kann man dann zeigen (Schaefer 1951), daß

$$(6.24) \quad \frac{U}{v} = \text{const.}$$

eine adiabatische Invariante ist.

Die Bewegung eines Systems von f Freiheitsgraden werde ganz allgemein durch die Lagekoordinaten $q_k(t)$, $k = 1, \dots, f$ beschrieben. Wenn die Bewegung in einer Koordinate periodisch ist (mit der Periode Π)

$$(6.25) \quad q_k(t) = q_k(t + \Pi),$$

dann gilt unter gewissen Bedingungen (vgl. Burgers 1917), daß das über die Periode genommene Integral

$$(6.26) \quad \oint p_k \, dq_k = I_a$$

eine adiabatische Invariante ist. Dabei ist p_k die zur Ortskoordinate q_k gehörende Impulskoordinate. Dieses Theorem hat bei der Begründung der Quantenmechanik eine wichtige Rolle gespielt. Wir beweisen es hier nicht. Wir werden aber zeigen, daß die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments darin enthalten ist, wie auch eine weitere adiabatische Invariante, die bei der Bewegung geladener Teilchen in Magnetfeldern eine Rolle spielt.

Wir wenden den Adiabatensatz (6.26) auf die in einer magnetischen Flasche gefangenen Teilchen an. Sie führen zweierlei periodische Bewegungen aus: einmal gyrieren sie um die Feldlinien, und zum anderen bewegen sie sich zwischen den beiden Spiegelpunkten hin und her. Für jede dieser periodischen Bewegungen gibt es eine adiabatische Invariante.

Setzen wir bei der Gyrationbewegung $q = a \varphi$, $p = m v_{\perp}$, wobei φ der Azimutwinkel längs der Gyrationbahn und a ihr Radius ist, dann folgt aus Gl. (6.26)

$$(6.27) \quad I_{a_1} = \oint p \, dq = \int_0^{2\pi} m v_{\perp} a \, d\varphi.$$

Wegen (vgl. Gl. (2.11))

$$(6.28) \quad a = \frac{m c v_{\perp}}{|q| B}$$

ergibt sich dann

$$(6.29) \quad I_{a_1} = \frac{2\pi m^2 c v_{\perp}^2}{|q| B} = \frac{4\pi m c}{|q|} \mu.$$

Das ergibt die uns schon aus Gl. (6.9) her bekannte Konstanz des magnetische Momentes.

Für die Bewegung zwischen den Spiegelpunkten setzen wir $p = m v_{\parallel}$; q ist die Kurvenlänge auf der Feldlinie. Dann folgt aus Gl. (6.26) und (6.14) eine zweite adiabatische Invariante

$$(6.30) \quad I_{a_2} = 2 \int_{q_1}^{q_2} m (v^2 - 2\mu B/m)^{1/2} dq = \text{const.},$$

wobei q_1, q_2 die Werte von q an den Spiegelpunkten sind. Die Periode dieser Bewegung ist:

$$(6.31) \quad \Pi = 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{v_{\parallel}} = 2 \int_{q_1}^{q_2} (v^2 - 2\mu B/m)^{-1/2} dq$$

(vgl. auch Chandrasekhar 1960).

Die adiabatische Bewegung geladener Teilchen ist ausführlich in einer Monographie von Northrop (1963) behandelt.

§ 7. Anwendungen

Bevor wir im nächsten Kapitel zur Magnetohydrodynamik kommen, sollen hier noch einige Anwendungen unserer bisherigen Theorie für die Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld besprochen werden.

a) Das Auftreffen geladener Teilchen auf die Erdoberfläche

Das Magnetfeld der Erde ist in erster Näherung ein Dipolfeld, das beschrieben wird durch die in Gl. (5.10) berechnete Flußfunktion:

$$(7.1) \quad F = M_E \sin^3 \vartheta/s.$$

Dabei ist $M_E = 8 \cdot 10^{25}$ Gauß cm³ das magnetische Dipolmoment der Erde (Kertz 1969).

Um festzustellen, unter welchen Bedingungen ein geladenes Teilchen bis auf die Erdoberfläche vordringen kann, betrachten wir wieder die verbotenen und erlaubten Gebiete des § 5. Dazu benötigen wir die Gleichung der Erdoberfläche im Bilddiagramm.

Die Erdkugel ist gegeben durch

$$(7.2) \quad R_E \sin \vartheta = s,$$

wobei R_E der Erdradius ist. Damit wird die Flußfunktion auf der Erdoberfläche:

$$(7.3) \quad F = M s^2 / R_E^3.$$

Die Erdoberfläche ist also im Bilddiagramm Teil einer Parabel $F \sim s^2$ (vgl. Abb. 7.1).

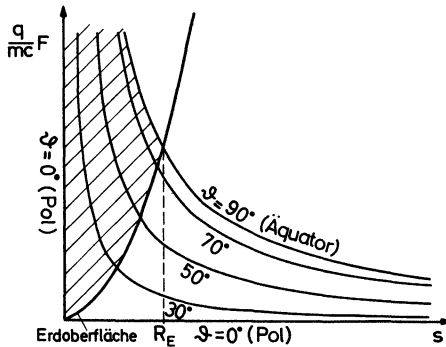


Abb. 7.1 Die Erdoberfläche wird im Bilddiagramm des magnetischen Dipolfeldes der Erde auf den Teil einer Parabel abgebildet, das Erdinnere auf das schraffierte Gebiet. R_E gibt den Radius der Erde an.

Wir betrachten Teilchen mit festgehaltenem verallgemeinerten Drehimpuls. Der Öffnungswinkel des entscheidenden („erlaubten“) Zwickels in der Bildebene wächst mit der kinetischen Energie der Teilchen. Bei zu kleiner kinetischer Energie ist der Öffnungswinkel so klein, daß das erlaubte Gebiet die in Abb. 5.4 gezeigte Form erhält.

Damit ein aus dem Unendlichen kommendes Teilchen einen Punkt A der Erdoberfläche erreichen kann, muß jedoch A stetig durch erlaubte Gebiete hindurch mit dem Unendlichen verbunden sein. Dazu muß im Grenzfall das erlaubte Gebiet die in Abb. 7.2 gezeigte Gestalt haben. Es gibt dann einen mini-

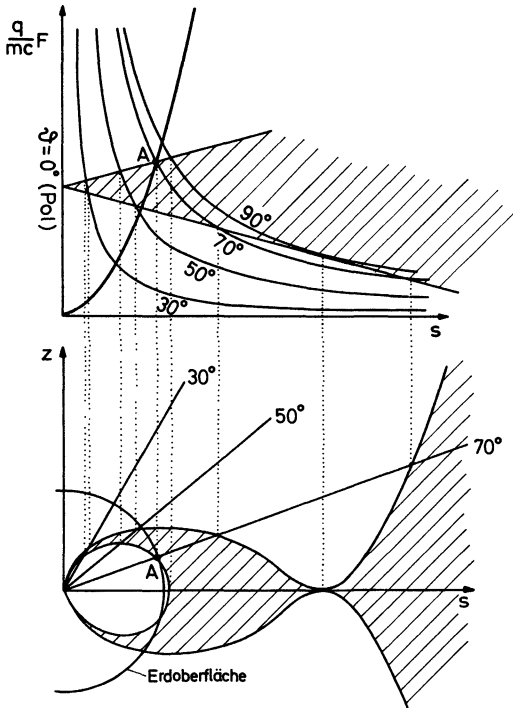
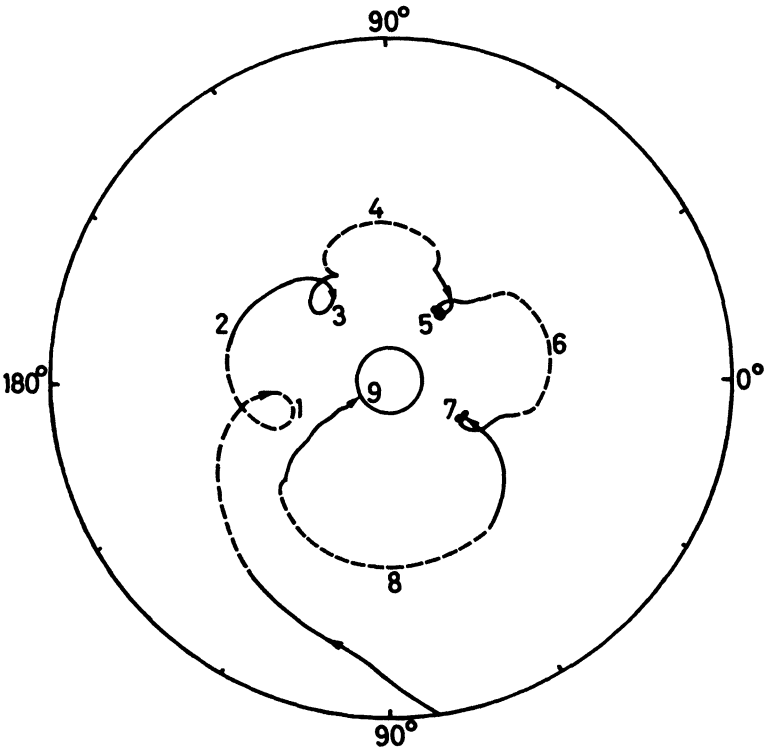
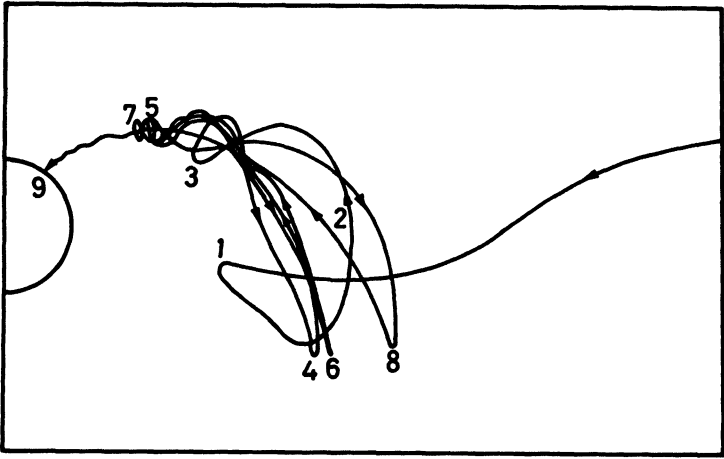


Abb. 7.2 Ein Punkt A der Erdoberfläche (bei 70° Poldistanz angenommen) wird nur dann von Teilchen aus dem Unendlichen erreicht, wenn sie eine gewisse Minimalenergie besitzen. Zur Veranschaulichung konstruiere man verschiedene "Zwickel" im Bilddiagramm, die A enthalten. Für gegebene Energie (d.h. für gegebenen Öffnungswinkel des Zwickels) treffen Teilchen aus dem Unendlichen gerade noch ein, wenn A am oberen Schenkel des den Zwickel aufspannenden Winkels liegt, während der andere Schenkel die Bildhyperbel des Äquators im Bilddiagramm gerade berührt.

malen Öffnungswinkel des Zwickels, nämlich wenn sein unterer Schenkel die Hyperbel $\vartheta = 90^\circ$ gerade berührt. Für größere Teilchenenergien öffnet sich der Zwickel noch weiter, das erlaubte Gebiet erhält die in Abb. 5.3 gezeigte Gestalt.

Zu vorgegebenem Drehimpuls können nur Teilchen oberhalb einer bestimmten Minimalenergie zu einem bestimmten Punkt der Erdoberfläche vordringen. Wie man ferner aus der Abb. 7.2 ablesen kann, ist diese Minimalenergie umso geringer, je näher am Pol sich der Punkt A befindet. Energiearme Teilchen können die Erdoberfläche oder die unteren Schichten der Atmosphäre nur in polnahen Gebieten erreichen. Deshalb wird das Polarlicht, das durch Auftref-



fen geladener Teilchen aus dem Sonnenplasma auf die obere Erdatmosphäre erzeugt wird, nur in Zonen hoher geographischer Breite beobachtet. Die Polarlichtzonen liegen normalerweise bei ca. 67° nördlicher bzw. südlicher geographischer Breite.

Teilchen höherer Energie haben ein größeres erlaubtes Gebiet, sie können weiter zum Äquator vordringen. Konsequenterweise sind bei besonders energiereichen Sonneneruptionen Polarlichter auch in Zonen niedriger geographischer Breite beobachtbar. Bei hinreichend hohen Energien der Teilchen kann jeder Punkt der Erdoberfläche erreicht werden.

Die Betrachtung verbotener und erlaubter Gebiete *allein* ist nun noch nicht hinreichend, um zu entscheiden, ob ein Teilchen wirklich auf die Erdoberfläche herunterkommen kann. Dabei hilft uns das magnetische Moment μ des Teilchens weiter. Wegen der Konvergenz der Feldlinien zu den Polen hin bildet das Feld dort einen magnetischen Flaschenhals. Das Teilchen kann nur dann weit genug zur Erdoberfläche herunter vordringen, wenn es ein hinreichend kleines magnetisches Moment hat, andernfalls wird es reflektiert.

Abb. 7.3 zeigt die numerisch berechnete Bahn eines Teilchens, das nach mehreren Reflexionen die Erdoberfläche auf einer komplizierten Bahn erreicht. Das kann man folgendermaßen verstehen: Drehimpuls und Energie des Teilchens, also I_1 und I_2 , sind absolute Konstanten der Bewegung, sie bleiben bei allen Gyrationen und Reflexionen konstant. Das magnetische Moment μ bleibt konstant, so lange der Radius der Gyrationenbewegung klein gegen den Krümmungsradius der Feldlinien ist. Das Teilchen nähert sich also beim ersten Anlauf dem Erdpol, kann aber wegen seines ungeeigneten magnetischen Momentes nicht bis zur Oberfläche vordringen. Es wird reflektiert, zurück in Gebiete geringerer Feldstärke. Dort ist der Gyrationenradius nicht mehr klein gegen die räumliche Ausdehnung des Feldes. Das Teilchen kann also jetzt sein magnetisches Moment ändern und einen zweiten Anlauf mit verändertem μ versuchen. Die Bahn des Teilchens ist dann eine andere, muß, aber natürlich noch in demselben erlaubten Gebiet liegen. Bei dem in Abb. 7.3 gezeigten Fall erreicht das Teilchen erst beim 9. Anlauf die Erdoberfläche, nachdem es jedesmal weit draußen sein magnetisches Mo-

Abb. 7.3 Numerisch berechnete Bahn eines geladenen Teilchens im Erdmagnetfeld. Die untere Abbildung zeigt die Projektion der Bahn in die Äquatorebene. Der gestrichelte Verlauf soll andeuten, daß sich das Teilchen unterhalb dieser Ebene befindet. Der komplizierte Bahnverlauf wird besonders deutlich wenn – wie im oberen Diagramm – die Meridianprojektion der Bahn gezeichnet wird. Die Nummern geben jeweils entsprechende Bahnpunkte in den beiden Zeichnungen wieder (nach Lüst, Schlüter, Katterbach 1956).

ment geändert hat. In der Realität können die Teilchenbahnen im Erdfeld also sehr kompliziert sein.

b) Gefangene Teilchen im Magnetfeld der Erde, Van-Allen-Gürtel

Oben betrachteten wir Teilchen, die sich aus dem Unendlichen der Erde nähern; das erlaubte Gebiet erstreckte sich also von der Erdoberfläche bis ins Unendliche. Bei der Konstruktion dieser Gebiete in § 5 sahen wir, daß es für bestimmte Kombinationen von I_1 und I_2 auch abgeschlossene erlaubte Gebiete gibt. Ein geladenes Teilchen, das in so einem Gebiet „geboren“ wird, z.B. durch Ionisation eines neutralen Teilchens, kann dieses Gebiet nicht mehr verlassen. Wenn sein magnetisches Moment nicht klein ist, kann es auch nicht ohne weiteres den Erdboden erreichen. Auf diese Weise kann das Dipolfeld der Erde geladene Teilchen speichern.

Van Allen führte 1952 erste Messungen durch, die auf eingefangene Teilchen im Magnetfeld der Erde schließen ließen. 1957 wurde in Sputnik II ein geringer Anstieg der Zählrate des Geigerzählers gemessen, 1958 in Explorer I ein starker Anstieg der Zählrate bis zur Übersättigung des Zählrohres. Weitere Messungen haben ergeben, daß es Zonen stark erhöhter Teilchendichte um die Erde herum gibt. Grob gesagt kann man zwei derartige Zonen unterscheiden, die sich gürtelförmig im Abstand von einigen Erdradien in der Äquatorebene

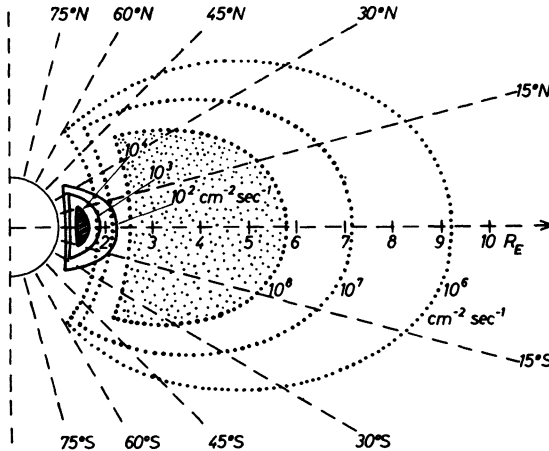


Abb. 7.4 Schematischer Schnitt durch den Van-Allen-Gürtel. Die ausgezogenen Kurven sind Linien konstanten Teilchenflusses für energiereiche Protonen (> 30 MeV), die punktierten Linien stehen für energiearme Protonen ($0.1 - 5$ MeV). Der Teilchenfluß hat zwei relative Maxima, die einem inneren und einem äußeren Strahlungsgürtel entsprechen (nach Kertz 1971).

um die Erde erstrecken. Ein Schnitt durch diese „Van-Allen-Gürtel“ („Van Allen Belts“) ist in Abb. 7.4 für die Protonen und in Abb. 7.5 für die Elektronen schematisch wiedergegeben. Eingezeichnet sind jeweils Linien konstanten Teilchenflusses. Die Van Allen-Gürtel bestehen vor allem aus Protonen, Elektronen und einer geringen Anzahl von Heliumkernen.

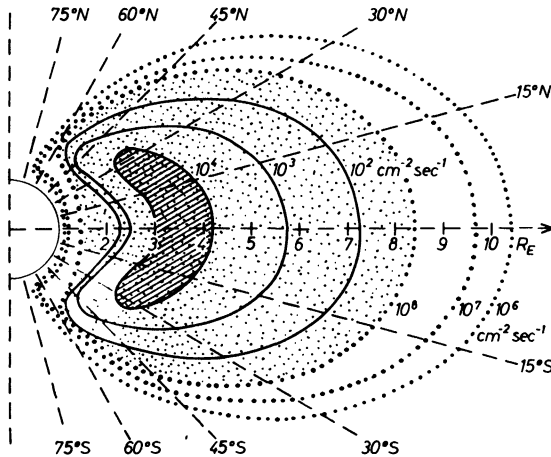


Abb. 7.5 Linien konstanten Teilchenflusses für Elektronen. Die ausgezogenen Kurven gelten für Elektronen hoher Energie (> 1.6 MeV), punktierte Linien für niedrige Elektronenenergien ($0.04 - 1$ MeV) (nach Kertz 1971).

Der Innere Gürtel besteht aus hochenergetischen Teilchen (Protonen der Energie ≥ 30 MeV, Elektronen der Energie ≥ 1.6 MeV) von annähernd konstanter Teilchendichte, während der äußere Gürtel aus relativ energiearmen Teilchen (≤ 1 MeV) besteht. Der äußere Gürtel ist starken Schwankungen im Zusammenhang mit der Sonnenaktivität unterworfen: Die bei einer Sonneneruption ausgestoßene Plasmawolke deformiert die Magnetosphäre der Erde und damit auch den äußeren Van-Allen-Gürtel.

Die Bewegung der Elektronen und Protonen in den Strahlungsgürteln setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen:

- 1) Die Gyrationbewegung um die Magnetfeldlinien. Für Elektronen ist die Gyrationperiode je nach ihrer Energie 10^{-6} bis 10^{-3} sec, für Protonen 2×10^{-3} bis 2 sec.
- 2) Die Hin- und Herbewegung in Nord-Südrichtung zwischen zwei polaren Spiegelpunkten. Da das Dipolfeld zu den geographischen Polen hin konvergiert, bildet es dort für die gyrierenden Teilchen eine magnetische Flasche.

Nach den Betrachtungen des letzten Paragraphen wird das Teilchen dort reflektiert; es bewegt sich auf Spiralbahnen um die Feldlinien zurück, bis es zur Reflexion auf der anderen Halbkugel der Erde kommt. Die Perioden dieser Oszillationen liegen je nach Energie und magnetischem Moment der Teilchen zwischen 0.1 und 0.6 Sekunden (Abb. 7.6).

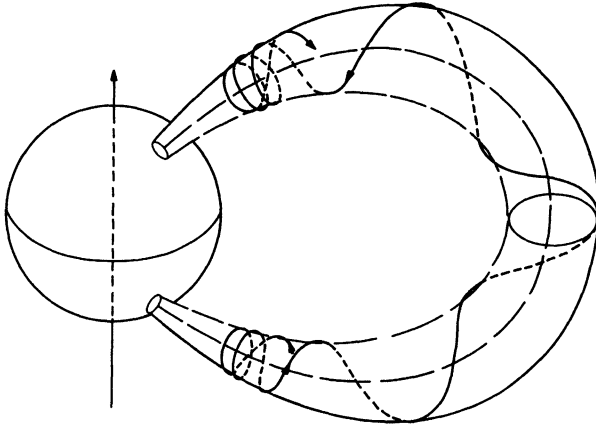


Abb. 7.6 Die geladenen Teilchen der Strahlungsgürtel gyrieren in Spiralbahnen um die Feldlinien und werden ständig zwischen den beiden Spiegelpunkten hin und her reflektiert.

3) Die Driftbewegung in geomagnetischer Länge. Diese Bewegung rührt vor allem daher, daß die sich in Nord-Südrichtung längs der Feldlinien bewegenden Teilchen infolge der Krümmung der Feldlinien eine von der Erde weggerichtete Fliehkraft spüren. Der Effekt ist derselbe wie bei einem Schwerfeld (vgl. § 3): es gibt eine ladungsabhängige Drift senkrecht zum Magnetfeld und zur Fliehkraft, also im wesentlichen eine Drift in geomagnetischer Länge. An Hand der Richtung des Erdmagnetfeldes kann man sich leicht überlegen: Die positiv geladenen Teilchen driften westwärts um die Erde, die Elektronen ostwärts. Beide Driftbewegungen zusammen ergeben einen westwärts gerichteten elektrischen Strom um die Erde. Die Umlaufperioden der Teilchen um die Erde liegen zwischen 0.3 und 24 Stunden.

Nun sind die Teilchen in den Strahlungsgürteln nicht absolut gefangen: Wenn der Winkel ihrer Bewegungsrichtung zum Magnetfeld klein genug ist, können sie durch die Flaschenhälsa am Pol auf die Erdoberfläche entweichen (vgl. § 6). Durch Zusammenstöße werden die gefangenen Teilchen gestreut und ein Teil von ihnen wird dabei in eine Bewegung nahezu in Richtung der

Feldlinien gebracht. Sie können in die Erdatmosphäre entweichen. Das ist einer der Prozesse, durch die den Strahlungsgürteln Teilchen verloren gehen. Die Nachlieferung kann zum Beispiel durch Neutronen erfolgen, die beim Auftreffen der kosmischen Strahlung auf die Erdatmosphäre entstehen. Ein Teil von ihnen fliegt nach außen, ungehindert durch das Erdmagnetfeld. Wenn sie in Protonen und Elektronen zerfallen, bleiben die Spaltprodukte dann im Feld hängen. Zum anderen dürften auch die Plasmawolken, die bei Sonneneruptionen ausgeschleudert werden, die Strahlungsgürtel mit Teilchen versorgen.

Eine eingehende Behandlung der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld der Erde findet man z.B. bei W. Kertz (1971).

c) Künstliche Strahlungsgürtel

Zur genaueren Erforschung der Physik der Strahlungsgürtel wurden in der Vergangenheit (1958 und 1962) von den USA und der USSR mehrere Atom- und Wasserstoffbomben in großer Höhe (200 – 500 km) gezündet. Die bei der Explosion frei werdenden Teilchen erhöhten die Intensität der Korpuskularstrahlung in und zwischen den Gürteln. Schon nach einigen Sekunden breiteten sich die Teilchen längs der Feldlinien aus, und in weniger als einer Stunde drifteten sie um die Erde herum und bildeten eine Schicht geladener Teilchen. Die sich ausbildenden künstlichen Strahlungsgürtel waren zum Teil über mehrere Wochen hinweg stabil. Schon Sekunden nach der Explosion beobachtete man in Zonen, die ungefähr auf derselben geographischen Länge wie der Explosionsort lagen, starke künstliche Polarlichter. Sie wurden durch Teilchen erzeugt, die nicht im Magnetfeld der Erde gefangen waren und deshalb in tiefere Schichten der Atmosphäre eindringen konnten (Hess 1972).

Kapitel II

MAGNETOHYDROKINEMATIK

In Kapitel I betrachteten wir die Bewegung einzelner geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern. Dabei haben wir die von den Teilchen hervorgerufenen Ladungsanhäufungen und Ströme vernachlässigt, die wiederum die Felder beeinflussen, in denen sich die Teilchen bewegen. Jetzt wollen wir nun nicht mehr einzelne Probeteilchen betrachten, sondern das Plasma als Ganzes in seinen Wechselwirkungen mit elektrischen und vor allem magnetischen Feldern studieren. Die einfachste Näherung dazu ist die Magnetohydrodynamik. Wir werden hier zunächst noch eine Einschränkung machen und in der Wechselwirkung zwischen Materie und Feld Kraftwirkungen vernachlässigen. Anstatt die Bewegungsgleichung für die Materie zu lösen, geben wir das Geschwindigkeitsfeld der Materie vor. Wir treiben also noch keine *Dynamik*, sondern nur *Kinematik*. Deshalb nennen wir dieses Kapitel *Magnetohydrokinematik*.

§ 8. Näherungsannahmen und Voraussetzungen

Man kann ein elektrisch leitendes Gas dadurch beschreiben, daß man die Gleichungen der Gasdynamik, also Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung, mit den Maxwell'schen Gleichungen verknüpft. Wie wir später sehen werden, erfaßt diese „Magnetohydrodynamik“ nur einen Teil der Phänomene, die in Plasmen auftreten können. Man spricht daher besser von der *magnetohydrodynamischen Näherung*.

Bei der Verknüpfung von Gas- und Elektrodynamik wollen wir einige vereinfachende Annahmen machen, die im Folgenden beschrieben werden:

a) Kleine Geschwindigkeiten

Es werden stets Geschwindigkeiten der Materie betrachtet, die gegen die Lichtgeschwindigkeit klein sind, es sei also immer

$$(8.1) \quad \frac{v}{c} \equiv \gamma \ll 1.$$

Außerdem sollen alle zeitlichen Änderungen des Feldes klein sein im folgenden Sinne: Es sei A irgendeine Feldgröße. Dann kann man die Ableitungen nach Ort und Zeit abschätzen gemäß:

$$(8.2) \quad \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \approx \frac{A}{L}, \quad \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \approx \frac{A}{\tau}.$$

Dabei sind L eine charakteristische Länge und τ eine charakteristische Zeit, in der sich jeweils die Größe A um ihren eigenen Betrag ändert. Man kann nun

$$(8.3) \quad \frac{L}{\tau} \approx v_{\text{ph}}$$

als die *Phasengeschwindigkeit* der Änderung der Feldgröße A definieren. Wir nehmen dann an, daß für alle unsere Feldgrößen stets gilt

$$(8.4) \quad \frac{v_{\text{ph}}}{c} \equiv \beta \ll 1.$$

Die Phasengeschwindigkeit soll also stets sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein; deshalb werden elektromagnetische Wellen in dieser Näherung nicht auftreten.

b) Leitfähigkeit

Es wird grundsätzlich nur sehr gut leitende Materie betrachtet. Dann können sich keine starken elektrischen Felder ausbilden. Es sei also stets

$$(8.5) \quad \frac{E}{B} \equiv \alpha \ll 1.$$

Das sind – zusammen mit der weiter unten gegebenen Form des Ohmschen Gesetzes – die Voraussetzungen der magnetohydrodynamischen Näherung. Sie ist eine Theorie, die linear in den kleinen Größen α , β , γ ist, in der also alle Glieder von zweiter und höherer Ordnung in α , β und γ vernachlässigt werden.

Die Transformationsgleichungen (1.4) und (1.5) gehen unter den obigen Voraussetzungen über in

$$(8.6) \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

$$(8.7) \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B},$$

da in Gl. (1.5) $|\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c| \approx vE/c = \gamma \alpha B$ vernachlässigt wird. Das System der ersten Maxwellschen Gleichungen

$$(8.8) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}},$$

$$(8.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

bleibt erhalten; in der Gleichung

$$(8.10) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}$$

dagegen kann das zweite Glied rechts, der Verschiebungsstrom, vernachlässigt werden. Zur Abschätzung approximieren wir $|\nabla \times \mathbf{B}|$ durch B/L und $|\dot{\mathbf{E}}|$ durch E/τ und finden

$$(8.11) \quad \frac{B}{L} \approx \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\alpha B}{\tau}.$$

Multiplikation mit L liefert mit Gl. (8.3)

$$(8.12) \quad B \approx \frac{4\pi}{c} j L + \frac{v_{ph}}{c} \cdot \alpha \cdot B.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite ist von der Größenordnung $\alpha \cdot \beta$, kann also vernachlässigt werden. Das erste Glied muß dann von derselben Größenordnung wie B sein. Das System der zweiten Maxwell-Gleichungen geht in unserer Näherung also über in

$$(8.13) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$(8.14) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sigma.$$

Diese eingeschränkte Maxwell-Gleichungen liefern eine nicht-relativistische Elektrodynamik, die nur für gute Leiter ($E \ll B$) gilt.

In einem Plasma spielen vor allem Ströme und Magnetfelder eine Rolle, elektrische Felder und Ladungen dagegen können als kleine Störungen betrachtet werden. Rein formal könnte man ebenso eine nicht-relativistische Elektrodynamik aufstellen, die nur für gute Isolatoren gilt. Da dort nur schwache Ströme fließen, hätte man $B \ll E$. In einem solchen System würden E und σ die Hauptrolle spielen, während B und j als kleine Störungen betrachtet werden könnten. Aber dieser Fall interessiert uns hier nicht.

c) Ohmsches Gesetz

Das Ohmsche Gesetz lautet

$$(8.15) \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

wobei λ [sec^{-1}] die Leitfähigkeit, eine Materialkonstante ist. Als eine weitere Voraussetzung der magneto hydrodynamischen Näherung fordern wir nun, daß das Ohmsche Gesetz im lokalen Ruhesystem des Plasmas immer in der Form (8.15) gelten soll. Das bedeutet: Gegeben sei ein Bezugssystem K , in dem ein

Beobachter ruht. Ein Plasma bewege sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in bezug auf den Beobachter. In seinem Ruhssystem K' soll dann gelten

$$(8.16) \quad \mathbf{j}' = \lambda \mathbf{E}',$$

wobei die Striche die im System K' gemessenen Größen charakterisieren sollen.

Wie sieht das nun im System K aus? λ kann als Materialkonstante nicht vom Bezugssystem abhängen. Weiterhin ist $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, da gemäß Gl. (8.7) und (8.13) gilt

$$(8.17) \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}' = \nabla' \times \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

während sich \mathbf{E} nach Gl. (8.6) transformiert.

Dann lautet das Ohmsche Gesetz im System K

$$(8.18) \quad \mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Wenn wir nun ein Gas haben, das sich beliebig bewegt, dann kann man an jeder Stelle ein lokales Bezugssystem K' einführen und von diesem aus das lokale Ohmsche Gesetz (8.16) auf einen Beobachter in einem System K transformieren. Damit folgt, daß das Gesetz (8.18) die Beziehung zwischen Strom und Feldern in dem System wiedergibt, in dem die Bewegung des Gases durch das (möglicherweise orts- und zeitabhängige) Vektorfeld \mathbf{v} beschrieben wird.

§ 9. Ein Anfangswertproblem

In § 8 haben wir gesehen, daß wir im Rahmen unserer Näherungen die folgenden Gleichungen haben:

$$(9.1) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$(9.2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}},$$

$$(9.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(9.4) \quad \mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Dazu kommt noch die Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma$. Sie gestattet, aus \mathbf{E} die Raumladung σ zu berechnen. Da σ in den anderen Gleichungen nicht auftritt, hat diese Gleichung keine Rückwirkung auf unser System. Wir wollen sie daher hier fortlassen.

Zu den elektrodynamischen Gleichungen (9.1) bis (9.4) kommen noch mechanische hinzu, welche die lokale Impuls- und Massenerhaltung ausdrücken; sie bestimmen das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} . Wir können jedoch auch schon aus den Gln. (9.1) bis (9.4) wichtige Schlüsse ziehen. Dazu denken wir uns das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} vorgegeben. Wir können dann fragen, wie sich Ströme und elektromagnetisches Feld in diesem Geschwindigkeitsfeld verhalten. Unser Gleichungssystem (9.1) bis (9.4) gestattet, das folgende *Anfangswertproblem* zu lösen:

Gegeben sei die räumliche Struktur des elektrischen und magnetischen Feldes für einen bestimmten Zeitpunkt t_0

$$(9.5) \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(r, t_0), \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(r, t_0), \quad (\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0)$$

sowie ein Geschwindigkeitsfeld

$$(9.6) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t), \quad t \geq t_0.$$

Dann ist das elektromagnetische Feld für alle Zukunft festgelegt:

$$(9.7) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r, t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(r, t), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(r, t), \quad t \geq t_0.$$

Wir wollen hier keinen allgemeinen Beweis dafür angeben. Wir wollen nur plausibel machen, wie aus den durch Gln. (9.1) bis (9.4) für den Zeitpunkt t_0 vorgegebenen Funktionen die Vektorfelder \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{j} für den Zeitpunkt $t_0 + dt$ folgen. Da man dann die gleiche Schlußweise für einen nächsten Zeitschritt machen kann, wird klar werden, daß damit das elektromagnetische Feld in unserem Problem eindeutig determiniert ist.

Aus Gl. (9.2) folgt

$$(9.8) \quad \dot{\mathbf{B}}(r, t_0) = -c \nabla \times \mathbf{E}(r, t_0)$$

und damit

$$(9.9) \quad \mathbf{B}(r, t_0 + dt) = \mathbf{B}(r, t_0) + \dot{\mathbf{B}}(r, t_0) dt.$$

\mathbf{B} war am Anfang divergenzfrei, es behält diese Eigenschaft bei, da der hinzukommende Anteil wegen Gl. (9.8) divergenzfrei ist. Aus \mathbf{B} können wir die Stromverteilung nach Gl. (9.1) bestimmen:

$$(9.10) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t_0 + dt) = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0 + dt),$$

und über das Ohmsche Gesetz Gl. (9.4) auch das elektrische Feld

$$(9.11) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0 + dt) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t_0 + dt) - \frac{1}{c} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0 + dt) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0 + dt),$$

da ja $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0 + dt)$ gemäß Gl. (9.6) vorgegeben war. Damit ist alles gezeigt.

Wir fragen hier nicht, wodurch \mathbf{v} bestimmt wird; wir geben das Geschwindigkeitsfeld vor und fragen, wie das elektromagnetische Feld in unserem leitenden Gas darauf reagiert. Wir betreiben ja „Magnetohydrokinematik“, wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel betont wurde.

Die folgenden drei Paragraphen werden wir diesem vereinfachten Problem widmen. Zum vollen Gleichungssystem der Magnetohydrodynamik kommen wir dann in Kapitel III. Dann werden wir die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung hinzunehmen und berücksichtigen, daß das elektromagnetische Feld Kräfte auf das aus geladenen Teilchen bestehende leitende Gas ausübt.

§ 10. Magnetfelder in bewegter Materie

Mit dem Gleichungssystem des letzten Paragraphen läßt sich einer der schönsten, das Leben des Magnetohydrodynamikers vereinfachenden Aspekte herleiten: das „eingefrorene“ Magnetfeld. Es geht dabei wieder um das Problem: Was geschieht mit dem elektromagnetischen Feld in einem gut leitenden, bewegten Medium? Gegeben sei also ein Magnetfeld zu einem festen Zeitpunkt $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$ sowie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Welche Aussagen lassen sich dann über das zukünftige Verhalten des Feldes machen?

a) Der magnetische Fluß durch eine flüssige Linie

Wir betrachten den magnetischen Fluß ϕ durch eine Fläche f , die von einer geschlossenen Kurve C berandet sei. Die Kurve C sei an die Plasmamaterie gebunden, d.h., sie bewege sich mit den sie bildenden Teilchen mit. Solch eine Kurve nennt man eine „flüssige Linie“. Auf der geschlossenen Kurve C legen wir ein Linienelement $d\mathbf{l}$ fest. Die Umlaufsrichtung von $d\mathbf{l}$ ist dabei beliebig,

wird aber während der folgenden Betrachtung festgehalten. Weiterhin ordnen wir der Fläche f ein gerichtetes Flächenelement $d\mathbf{f}$ zu in der Weise, daß $d\mathbf{f}$ jeweils senkrecht auf f steht und so gerichtet ist, daß es mit der Umlaufrichtung von $d\mathbf{l}$ ein Rechtssystem bildet. Wir definieren dann den *magnetischen Fluß* durch f gemäß

$$(10.1) \quad \phi = \int_f \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}.$$

Die magnetische Flußfunktion F , die wir in § 4 kennenlernten, ist ein Spezialfall der Funktion ϕ für axialsymmetrische Magnetfelder.

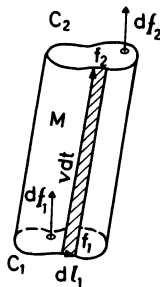


Abb. 10.1 Die flüssige Linie C überstreicht in der Zeit dt eine Mantelfläche M , deren (gerichtetes) Flächenelement $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}_1$ ist; die Flächenelemente der Deckflächen f_1, f_2 seien mit $d\mathbf{f}_1, d\mathbf{f}_2$ bezeichnet.

Wir verfolgen nun die Kurve C während eines Zeitintervalles dt . Der Index 1 charakterisiere den Beginn, der Index 2 das Ende von dt (Abb. 10.1). Man hat dann zwei geschlossene Linien C_1, C_2 , welche jeweils die Flächen f_1, f_2 umschließen. Die von den Kurven C_1 und C_2 umrandeten Flächen f_1 und f_2 sind nicht eindeutig festgelegt. Da es uns nur auf die Berechnung des magnetischen Flusses ankommt, ist das auch nicht wichtig. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt aus dem Gaußschen Satz, daß für alle von derselben Kurve C umschlossenen Flächen f der Fluß derselbe ist.

Während der Bewegung bleibt der Fluß durch die flüssige Linie C im allgemeinen nicht konstant. Das hat zwei Ursachen. Die magnetische Feldstärke kann sich ändern; dann ändert sich der Fluß durch C , selbst wenn sich die Materie gar nicht bewegt. Zum anderen kann bei bewegter Materie die mitfließende Kurve C Feldlinien entlassen, die sie vorher umschloß, oder neue Feldlinien umfassen. Dabei ändert sich der Fluß, selbst wenn das Magnetfeld konstant bleibt.

Es ist nun

$$(10.2) \quad \phi_i = \int_{f_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2,$$

wobei $d\mathbf{f}_i$ das gerichtete Flächenelement von f_i ist. Wir interessieren uns für die Flußänderung $d\phi = \phi_2 - \phi_1$ während der Bewegung.

Dazu betrachten wir Abb. 10.1. Während der Bewegung von C_1 nach C_2 beschreibt die flüssige Linie eine Mantelfläche M . Der Fluß ϕ_2 durch C_2 unterscheidet sich vom Fluß ϕ_1 durch C_1 dadurch, daß erstens zum späteren Zeitpunkt das Magnetfeld einen anderen Wert hat und zweitens dadurch, daß durch die Mantelfläche zusätzliche Feldlinien eintreten. Der erste Effekt gibt zur Flußänderung den Beitrag

$$(10.3) \quad dt \int_{f_1} \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f}_1.$$

Dieses Integral könnte man natürlich auch über die Fläche f_2 erstrecken – der Unterschied ist in dt von zweiter Ordnung. Der Fluß, der durch die Mantelfläche M geht, ist

$$(10.4) \quad \int_M \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_M,$$

dabei ist $d\mathbf{f}_M$ das gerichtete Flächenelement der Mantelfläche:

$$(10.5) \quad d\mathbf{f}_M = \mathbf{v} \times d\mathbf{l}_1 \cdot dt,$$

wobei $d\mathbf{l}_1$ das gerichtete Linienelement von C_1 ist (vgl. Abb. 10.1). Also hat man

$$(10.6) \quad d\phi = \phi_2 - \phi_1 = dt \int_{f_1} \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f}_1 + \int_M \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_M.$$

Mit Gl. (10.5) können wir schreiben

$$(10.7) \quad d\phi = dt \int_{f_1} \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f}_1 + dt \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}_1.$$

Es gilt nun

$$(10.8) \quad \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}_1 = - \int_{C_1} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_{f_1} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f}_1,$$

wobei zuletzt der Stokessche Satz benutzt worden ist. Also ergibt sich

$$(10.9) \quad d\phi = dt \int_{f_1} (\dot{\mathbf{B}} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) df_1.$$

Aus dem Ohmschen Gesetz (9.4) folgt

$$(10.10) \quad -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -c \nabla \times \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} + c \nabla \times \mathbf{E}.$$

Zusammen mit $\dot{\mathbf{B}} = -c \nabla \times \mathbf{E}$ wird Gl. (10.7) schließlich zu

$$(10.11) \quad \frac{d\phi}{dt} = -c \int_{f_1} \nabla \times \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} df_1 = -c \int_{C_1} \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}_1.$$

b) Eingefrorene Feldlinien

Aus Gl. (10.11) ersieht man, daß die Flußänderung umgekehrt proportional zur Leitfähigkeit λ ist. Für $\lambda \rightarrow \infty$ geht $d\phi/dt$ gegen Null. Die Folge davon ist, daß bei unendlicher Leitfähigkeit die Feldlinien „eingefroren“ sind. Sie werden von der Materie mitgenommen, als ob sie an ihr festhängen würden.

Das wird in Abb. 10.2 anschaulich. Im oberen Bild wird ein Schlauch von Feldlinien von zwei flüssigen Linien C und C' umschlossen. Wenn sich die

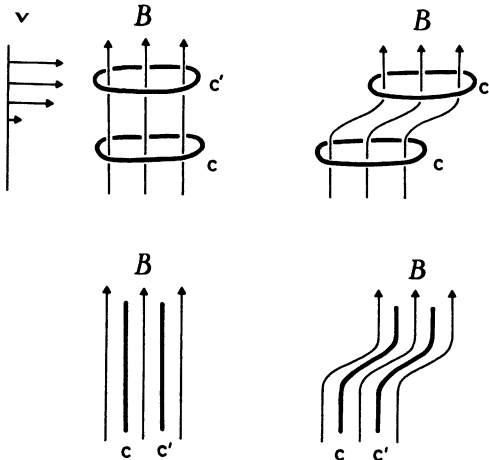


Abb. 10.2 Beispiele für die Verformung von flüssigen Linien und Feldlinien durch ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld.

Materie so bewegt, daß C' nach rechts rutscht, dann muß sich der von C' umschlossene Schlauch auch nach rechts bewegen, damit der Fluß durch C' konstant bleibt. Im unteren Bild links hat man ein homogenes Magnetfeld und flüssige Linien C und C' in Seitenansicht, die ebene Flächen senkrecht zur Zeichenebene und parallel zu den Feldlinien umschließen. Die Flüsse durch C und C' sind null. Wenn das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} in der oberen Bildhälfte die flüssigen Linien nach rechts biegt, dann müssen die Feldlinien mit nach rechts gehen, da sonst der Fluß durch C und C' von Null verschieden würde.

c) Die Dissipation von Magnetfeldern

Wir wollen jetzt berechnen, wie sich das Magnetfeld in bewegter Materie bei *endlicher* Leitfähigkeit ändert. Der Einfachheit halber nehmen wir λ als konstant an. Verbinden wir die Maxwellsche Gleichung (9.2) mit dem Ohmschen Gesetz (9.4), so folgt

$$(10.12) \quad \dot{\mathbf{B}} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -c \nabla \times \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}.$$

Ersetzen wir \mathbf{j} nach Gl. (9.1) durch $\frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$, so erhalten wir bei Verwendung der Beziehungen $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$(10.13) \quad \dot{\mathbf{B}} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\lambda} \nabla \times \mathbf{B} \right) = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B}.$$

Gibt man also $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sowie \mathbf{B} zu einem bestimmten Zeitpunkt vor, so kann man mit obiger Gleichung das zukünftige zeitliche Verhalten von \mathbf{B} bestimmen.

Insbesondere gilt Gl. (10.13) natürlich auch für $\mathbf{v} = 0$. Wählen wir als Beispiel in einem kartesischen Koordinatensystem

$$(10.14) \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{B} = (B_x(y, t), 0, 0),$$

dann lautet Gl. (10.13)

$$(10.15) \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}.$$

Diese Gleichung ist aber von der Form der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung! Bei einer eindimensionalen Temperaturverteilung $T(y)$ beschreibt die Gleichung

$$(10.16) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

das zeitliche Verhalten. Dabei ist κ die als konstant angenommene Wärmeleitfähigkeit. Da man durch Vergleich der beiden Gln. (10.15) und (10.16) sehen kann, daß sich bei dieser Analogie Magnetfeld und Temperatur entsprechen, kann man einiges über das Verhalten von B_x aus unserer Erfahrung über das Verhalten von T schließen. Nehmen wir etwa an, in der Nähe von $y = 0$ sei zu einem bestimmten Zeitpunkt B_x besonders groß, während es für größere $|y|$ -Werte rasch abfallen möge. Wie verhält sich dann das Feld mit der Zeit? Ganz analog wie eine sehr heiße Stelle eines sonst kühlen Wärmeleiters! Die heiße Stelle in der Umgebung von $y = 0$ kühlt sich ab, Wärme fließt nach beiden Seiten hin ab. Dasselbe geschieht mit unserer Magnetfeldkonzentration in der Nähe von $y = 0$. Das Feld zerfließt langsam, die Feldlinien bewegen sich immer weiter von $y = 0$ weg. Obwohl dabei der Fluß durch die y - z -Ebene nicht geändert wird, verringert sich die magnetische Energie unseres Systems. Wegen der endlichen Leitfähigkeit geht sie über die das Feld erzeugenden Ströme in Joulesche Wärme.

Wie schnell geht das nun vor sich? Wir schätzen die Zeit für das Auseinanderlaufen des Feldes größenordnungsmäßig ab:

$$(10.17) \quad \frac{B}{\tau} \approx \frac{c^2}{4\pi\lambda} \frac{B}{L^2}.$$

Wir haben $\partial B_x / \partial t \approx B / \tau$ und $\partial^2 B / \partial y^2 \approx B / L^2$ gesetzt. Dabei soll τ die Zeit sein, innerhalb der sich die Feldstärke an einer Stelle etwa um ihren eigenen Betrag ändert und L die charakteristische Länge. τ ist die *Abklingzeit* des Magnetfeldes; sie wird auch die *Dissipationszeit* genannt:

$$(10.18) \quad \tau \approx \frac{4\pi\lambda}{c^2} L^2.$$

Hieraus sieht man, daß räumlich kleine Felder (L klein) schnell zerfallen, große Felder dagegen langsam.

Die Gl. (10.18) gilt ganz allgemein für Magnetfelder in Leitern; beispielsweise auch für das Feld eines Kupferblockes: Bei einer Kantenlänge von 10 cm und der Leitfähigkeit von $\lambda = 10^{18} \text{ sec}^{-1}$ wird $\tau \approx 1 \text{ sec}$.

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ wird die Abklingzeit unendlich. Dann bleibt das Feld in der Materie für immer eingefroren, wie wir schon in b) sahen.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß Magnetfelder in kosmischen Objekten extrem lange Abklingzeiten haben – oft länger als das Alter der

Welt. Später in § 12 und 13 werden wir dann die hier hergeleitete Gl. (10.13) näher betrachten.

§ 11. Abklingzeiten von Magnetfeldern

a) Magnetfelder in Sternen

In den Oberflächenerscheinungen der Sterne spielen Magnetfelder häufig eine Rolle. Die Sonne ist der einzige Stern, auf dem man Oberflächendetails beobachten kann. Die starken magnetischen Felder in den Flecken und in anderen Störungen der Sonnenoberfläche sind seit langem bekannt (vgl. Abschnitt c) dieses Paragraphen). Ein allgemeines Magnetfeld der Sonne in dem Sinne, wie die Erde ein inneres Magnetfeld aufweist, wurde erst in jüngerer Zeit positiv nachgewiesen (Babcock und Babcock 1955). Die Feldstärke dieses Feldes liegt in der Größenordnung von 1Γ an den Polen.

Die Sonne hat eine mittlere Leitfähigkeit von $\lambda \approx 10^{16} \text{ sec}^{-1}$. Mit $L \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ wird nach Gl. (10.18) die Abklingzeit für ein Magnetfeld von der Lineardimension des Sonnenradius $\tau = 6 \cdot 10^{17} \text{ sec} \approx 2 \cdot 10^{10}$ Jahre. Sie ist damit größer als das Alter der Sonne von 4×10^9 Jahren. Ein Stern wie die Sonne könnte also durchaus ein „fossiles“ Magnetfeld haben, das er aus der interstellaren Materie bei seiner Entstehung mitbekam und das bis heute noch nicht zerfallen ist. Leider liegen die Dinge nicht ganz so einfach, denn das allgemeine Feld der Sonne polt in etwa mit dem 22jährigen Sonnenzyklus um (Howard 1965). Im Falle der Sonne ist also das Modell des fossilen Feldes unwahrscheinlich. Auf die komplizierteren Dynamo-Modelle für die Erklärung des allgemeinen Sonnenfeldes kommen wir in § 13 und 14 zu sprechen.

Als *magnetische Sterne* bezeichnet man Sterne, in deren Spektrum man auf Grund starker Magnetfelder eine Zeeman-Aufspaltung der Linien beobachten kann. Man kennt heute eine Reihe von magnetischen Sternen. Sie haben Felder von mehreren tausend Gauß. Die gemessene Feldstärke variiert mit der Zeit – meist mit Perioden im Intervall von 5 bis 9 Tagen. Man spricht deshalb auch von „magnetischen Veränderlichen“.

Abb. 11.1 zeigt die mit Hilfe des Zeeman-Effektes gemessene magnetische Feldstärke des Sterns HD 125248, die mit einer Periode von 9.29 Tagen schwankt. Obwohl wir später sehen werden, daß es unter Umständen gelingt, die Formel (10.18) für die Abklingzeit zu umgehen, ist es schwer vorstellbar, daß sich das Magnetfeld eines Sterns innerhalb von so kurzer Zeit umpolen

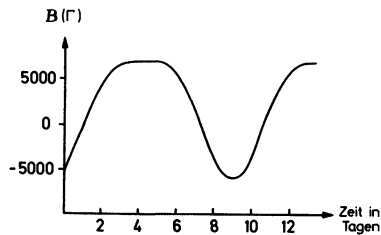


Abb. 11.1 Die periodisch veränderliche Feldstärke des Sterns HD 125248.

kann. Das könnten nur Oberflächenfelder tun, aber wahrscheinlich handelt es sich um rotierende Sterne mit einem eingefrorenen, vielleicht dipolartigen Magnetfeld, bei denen Rotationsachse und Symmetrieachse des Magnetfeldes nicht zusammenfallen. Dann kann der Stern uns einmal seinen magnetischen Nordpol und eine halbe Rotationsperiode später seinen magnetischen Südpol zuwenden, und man beobachtet ein sich umpolendes Feld, obwohl das Magnetfeld in Wirklichkeit eingefroren ist.

Für diese Deutung der meisten magnetischen Veränderlichen spricht auch, daß die Breiten der Linien im Absorptionsspektrum bei den Sternen mit kurzer Periode größer sind als bei solchen mit langer Periode. Die Linienbreiten hängen mit der Rotationsgeschwindigkeit zusammen: Betrachtet ein Beobachter einen rotierenden Stern, so kommt die eine Hälfte der ihm zugewandten Sternscheibe auf ihn zu, die andere bewegt sich von ihm fort. Jede Spektrallinie wird also durch den Dopplereffekt sowohl nach blau wie auch nach rot verschoben, das heißt, sie wird verbreitert. Bei diesem Rotationsmodell ist natürlich die magnetische Periode gleich der Rotationsperiode. Je kürzer also die magnetische Periode, umso kürzer ist die Rotationsperiode und umso stärker die Verbreiterung der Spektrallinien durch den Dopplereffekt. Eine sehr schöne Diskussion der theoretischen Probleme bei magnetischen Sternen gibt Mestel (1971). Wenn Sterne starke eingefrorene Magnetfelder von ihrer Entstehung her besitzen sollen, woher kommen die starken Felder?

Ein Stern entstehe aus einer sphärisch-symmetrischen interstellaren Wolke vom Radius R , die – durch die eigene Gravitation getrieben – in sich zusammenfällt. In ihr sei ein homogenes Magnetfeld vom Betrage B . Während der Sternbildung verringert sich R , und die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ steigt an gemäß

$$(11.1) \quad \bar{\rho} \sim \frac{1}{R^3}$$

während die mittlere Feldstärke nach

$$(11.2) \quad \bar{B} \sim \frac{1}{R^2}$$

ansteigt, da die Feldlinien eingefroren sind. Also gilt

$$(11.3) \quad \bar{B} \sim \rho^{2/3}.$$

Wir nehmen an, daß anfangs Feld und Materiedichte die Werte des interstellaren Raumes haben mögen, also $B = 10^{-5} \dots 10^{-6} \Gamma$, $\rho \approx 10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$. Wenn die Wolke dann bis zur gegenwärtigen mittleren Dichte der Sonne von $\bar{\rho} \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$ kontrahiert, dann wird $B \approx 10^{10} \Gamma$. Das ist viele Größenordnungen über dem mittleren Feld der Sonne ($\bar{B} \approx 1 \Gamma$). Bei der Sternbildung aus interstellaren Wolken bleibt also sicherlich genügend magnetischer Fluß übrig, um das Magnetfeld der Sterne zu erklären. Im Gegenteil, man muß begründen, warum die Sterne so schwache Magnetfelder haben. In Wirklichkeit können verschiedene Prozesse wie z.B. Turbulenz (siehe unten) das Magnetfeld sehr stark herunterdrücken.

Es ist zu beachten, daß wir hier immer annahmen, daß die magnetischen Feldlinien willenlos der Bewegung der Materie folgen. In Wahrheit übt das Feld eine Kraft auf die Materie aus, welche die Kontraktion zu verhindern sucht. Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf die Materie behandeln wir im nächsten Kapitel.

b) Magnetfelder in Weißen Zwergen und in Neutronensternen

Wir haben schon in § 2 erwähnt, daß auf Weißen Zwergen Magnetfelder nachgewiesen worden sind. Die Beobachtungen der Pulsare (vgl. § 30) legen nahe, daß auch auf Neutronensternen starke Magnetfelder eine wichtige Rolle spielen. Bei beiden Arten von Sternen scheinen die Magnetfelder viel stärker zu sein als bei normalen Sternen, etwa bei Hauptreihensternen. Das läßt sich durch Kontraktion aus normalen Sternen bei eingefrorenen Magnetfeldern erklären. Wir gehen von einem Hauptreihenstern der mittleren Dichte $\bar{\rho} = 1 \text{ g cm}^{-3}$ mit einem Feld von nur $\bar{B} \approx 1 \Gamma$ aus. Kontrahiert dieser Stern zu einem Weißen Zwerg, so beträgt die Dichte danach $\bar{\rho} = 10^6 \text{ g cm}^{-3}$, also ist dann $\bar{B} \approx 10^4 \Gamma$. Analog bekommt man für Neutronensterne ($\bar{\rho} \approx 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$) Feldstärken von $\bar{B} \approx 10^{10} \Gamma$. Die berechneten Feldstärken werden entsprechend größer, wenn man für die Hauptreihensterne Feldstärken der magnetischen Sterne ($\approx 10^3 \Gamma$) nimmt. Außerdem besteht Grund zu der Annahme, daß die beobachteten Weißen Zwerge und die in Pulsaren vermuteten Neutronensterne aus den inneren Teilen normaler Sterne gebildet worden sind. Es ist durchaus möglich, daß Sterne wie die Sonne in ihrem Innern viel stärkere Felder besitzen, als man aufgrund ihrer Oberflächenfelder

vermuten sollte. Dann wären für die daraus gebildeten Zwerg- und Neutronensterne noch höhere Felder zu erwarten.

Daß man auch bei Sternen, die im wesentlichen aus Neutronen bestehen, unsere Betrachtungen über eingefrorene Feldlinien anwenden kann, rührt daher, daß dort Gleichgewicht herrscht zwischen dem Zerfallsprozeß der Neutronen in Protonen und Elektronen und der Bildung von Neutronen aus diesen Bestandteilen. Obwohl nahezu die ganze Materie aus Neutronen besteht, sind in Neutronensternen doch immer genügend freie Elektronen vorhanden, um eine hohe Leitfähigkeit zu garantieren.

c) Magnetfelder in Sonnenflecken

Neben der um etwa 1200° niedrigeren Temperatur unterscheiden sich die Sonnenflecken vor allem durch ihre starken Magnetfelder von der umgebenden Photosphäre. Die Feldstärken in den Flecken betragen 2000 – 3000 Gauß. In Sonnenflecken ist die Leitfähigkeit von der Größenordnung $\lambda = 10^9 \text{ sec}^{-1}$ (Schröter 1966), während die typische Lineardimension der Flecken $L = 30\,000 \text{ km}$ beträgt. Daraus folgt eine Abklingzeit von etwa 3 Jahren, das ist sehr viel länger als die Lebensdauer der Flecken. Man muß also annehmen, daß beim Entstehen oder Verschwinden eines Sonnenflecks das Magnetfeld nicht mitentsteht oder verschwindet, sondern daß das Feld ein langlebiges Gebilde ist, das durch Materiebewegung vorübergehend an die Oberfläche gebracht wird.

d) Interstellare Magnetfelder

In den HI-Gebieten der interstellaren Materie, in denen der Wasserstoff neutral ist, ist die Leitfähigkeit hauptsächlich durch die Elektronen der in kleinen Mengen vorhandenen Metalle bestimmt. Es ist $\lambda \approx 10^{10} \text{ sec}^{-1}$, wenn man eine Temperatur von 100° K für diese Gebiete annimmt (vgl. Kaplan, Pikelner 1970). Nehmen wir diesen Wert als charakteristisch für die ganze Milchstraße an und setzen für den Durchmesser der Milchstraßenscheibe $L = 25 \text{ Kiloparsec} \approx 10^{23} \text{ cm}$, so folgt $\tau \approx 10^{36} \text{ sec}$, das ist etwa das 10^{18} fache des Weltalters! Interstellare Magnetfelder sind also außerordentlich langlebig.

e) Abklingzeit und Lineardimension

Wir schließen noch eine Bemerkung über die Formel für die Abklingzeit Gl. (10.18) an. Diese Formel kann man nämlich betrügen:

Wir machen dazu ein Gedankenexperiment: Gegeben sei ein Plasma, in dem wir eine quadratische Fläche der Seitenlänge L betrachten. Wir denken uns ein Magnetfeld, das in der linken Hälfte des Quadrates (in Abb. 11.2 a schwarz gezeichnet) senkrecht nach unten weisen möge, in der rechten Hälfte senk-

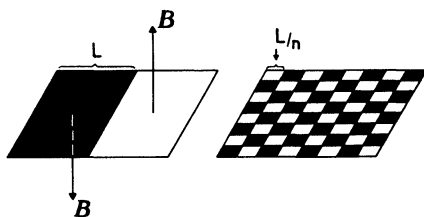


Abb. 11.2 Durch Aufteilung der großen Gebiete entgegengesetzter Feldstärke und durch Verschiebung senkrecht zum Feld lassen sich die Gebiete verkleinern und damit die Abklingzeit des Magnetfeldes herunterdrücken.

recht nach oben. Der Einfachheit halber seien die Felder in den beiden Hälften homogen, so daß B an der Grenzlinie unstetig sei. Wenn die Länge L groß ist, wird es bei hoher Leitfähigkeit lange dauern, bis die beiden entgegengesetzten Felder einander auslöschen. Die Zeit dafür ist nach Gl. (10.18)

$$(11.4) \quad \tau = \frac{4\pi\lambda}{c^2} L^2.$$

Jetzt teilen wir die quadratische Fläche in n^2 kleinere Quadrate der Seitenlänge L/n . Diese kleinen Quadrate verschieben wir mitsamt den durch sie gehenden Feldlinien und der an jeder Feldlinie hängenden Materie so, daß ein Schachbrettmuster entsteht, in dem das Magnetfeld in benachbarten Quadraten verschiedene Richtung hat (Abb. 11.2 b). Diese Verschiebung ist ohne Aufwendung von Arbeit möglich, da sie senkrecht zu B erfolgt. Aber anstatt der Abklingzeit τ hat diese Konfiguration jetzt die viel kürzere Abklingzeit

$$(11.5) \quad \tau_n = \frac{\tau}{n^2}.$$

Durch geeignete Materiebewegung kann man also erreichen, daß das Magnetfeld viel schneller abklingt als im Fall der Ruhe.

Der oben beschriebene Effekt ist in der Astrophysik wichtig: Befindet sich ein felddurchsetztes Gebiet in turbulenter Bewegung, so sorgt diese für kleine charakteristische Lineardimensionen und damit für ein schnelles Abklingen des Feldes. In einem Stern, in dem die Materie eine Konvektionsbewegung ausführt, kann das Magnetfeld sehr viel schneller abklingen, als in a) für die Sonne abgeschätzt wurde. Die Bewegung der Materie verbeult das Feld statistisch so, daß es sich schon innerhalb kleiner Lineardimensionen stark ändert und sich Feldlinien entgegengesetzter Richtung nahe kommen. Die Verkleinerung der für das Feld charakteristischen Länge setzt die Abklingzeit herunter, und benachbarte entgegengesetzte Feldlinien können sich gegenseitig auslöschen.

§ 12: Strömung quer zum Magnetfeld bei vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld

Bei der Abschätzung der Abklingzeiten im letzten Paragraphen betrachten wir das zeitliche Verhalten des Magnetfeldes nur im Spezialfall der unbewegten Materie. Jetzt soll Gl. (10.13) mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ untersucht werden. Dann muß das Feld nicht abklingen; wenn \mathbf{v} zeitunabhängig ist, gibt es eine stationäre Lösung. Für sie gilt

$$(12.1) \quad -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B},$$

und wir erhalten daraus die Abschätzung

$$(12.2) \quad v_{\perp} \approx \frac{c^2}{4\pi\lambda L} \approx \frac{L}{\tau}.$$

Dabei ist v_{\perp} die Geschwindigkeit quer zur Feldrichtung. Wir können das so deuten: Wenn Materie quer zum Magnetfeld fließt, dann krümmt sich das Magnetfeld solange, bis seine charakteristische Länge L so klein ist, daß sie die Bedingung (12.2) erfüllt. Dann ist ein stationärer Zustand möglich.

a) Dimensionslose Variablen

Mit

$$(12.3) \quad \eta = \frac{c^2}{4\pi\lambda}$$

erhält man aus Gl. (10.13)

$$(12.4) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \eta \Delta \mathbf{B}.$$

Wir führen jetzt neue Variablen ein:

$$(12.5) \quad \mathbf{B} = b \tilde{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{r} = L \tilde{\mathbf{r}}, \quad t = \tau \tilde{t}, \quad \mathbf{v} = U \tilde{\mathbf{v}}, \quad (U = L/\tau).$$

Dabei sind alle mit \sim versehenen Größen dimensionslose Skalare bzw. Vektoren. Damit wird Gl. (12.4) dimensionslos:

$$(12.6) \quad \frac{b}{\tau} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{U b}{L} \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{\eta b}{L^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}}.$$

Die Zeichen \sim über den Differentialoperatoren deuten dabei an, daß sich die Operatoren $\tilde{\nabla}$ und $\tilde{\Delta}$ auf die dimensionslosen Ortsvariablen beziehen.

Wir definieren nun die *magnetische Reynoldszahl* R_M durch

$$(12.7) \quad R_M = \frac{UL}{\eta} = \frac{4\pi\lambda UL}{c^2}.$$

Dann geht Gl. (12.6) über in

$$(12.8) \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{R_M} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}}.$$

Die dimensionslose Form (12.8) unserer Gleichung hat den Vorteil, daß man leicht erkennt, daß man mit einer Lösung gleich eine dreifach unendliche Lösungsschar vorliegen hat. Es sei eine Lösung in den dimensionslosen Variablen für einen Wert von R_M und für das Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}}$ bekannt: $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$. Dann ist auch $b \cdot \tilde{\mathbf{B}}(L\tilde{\mathbf{r}}, \tau\tilde{t})$ zum gleichen Wert von R_M und zum Geschwindigkeitsfeld $U \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ eine Lösung, wenn L, τ, U, η die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(12.9) \quad UL/\eta = R_M, \quad L/\tau = U.$$

Man kann beispielsweise U und L frei wählen; dann sind τ und η bei vorgegebenem R_M der Lösung festgelegt. Da b noch beliebig wählbar ist, hat man in der Tat mit einer Lösung von Gl. (12.8) eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen erhalten, charakterisiert durch zum Beispiel U, η und b . Die neuen Lösungen gehören dann zu anderen Werten von η (und damit zu anderen λ) und zu anderen Geschwindigkeitsfeldern $U \tilde{\mathbf{v}}(L\tilde{\mathbf{r}}, \tau\tilde{t})$, sind also keineswegs trivial.

Für unendliche Leitfähigkeit geht $R_M \rightarrow \infty$. Andererseits sind dann die Feldlinien streng eingefroren. Da in Gl. (12.8) aber nur R_M , nicht aber λ explizit auftritt, können wir schließen, daß immer bei großen Werten von R_M die Feldlinien eingefroren sind. Bei kleinen Werten von R_M verhalten sich die Lösungen so wie bei schlechter Leitfähigkeit. Dann sind Materie und Feld frei gegeneinander beweglich.

b) Lösung für eine Parallelströmung

Wir werden jetzt eine exakte Lösung der Gl. (12.8) behandeln, welche eine stationäre Parallelströmung senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld beschreibt. Wir lassen der Einfachheit halber die Schlangen über den dimensionslosen Größen fort und suchen eine Lösung der Gleichung

$$(12.10) \quad -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{R_M} \Delta \mathbf{B}.$$

Das Geschwindigkeitsfeld in einem kartesischen Koordinatensystem sei $\mathbf{v} = (v_x(z), 0, 0)$, das Magnetfeld sei $\mathbf{B} = (B_x(z), 0, B_z(z))$. \mathbf{v} und \mathbf{B} hängen also nur von z ab (vgl. Abb. 12.1).

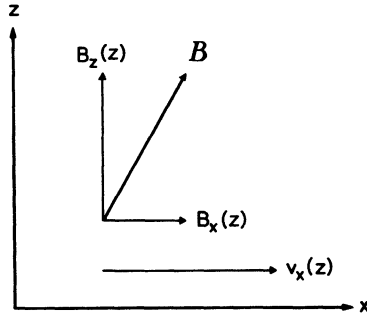


Abb. 12.1 Magnetfeld und Strömungsfeld im Fall der Parallelströmung.

Wie wird das Magnetfeld durch das Geschwindigkeitsfeld verbogen?

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ist $B_z = \text{const.}$

Weiterhin ist

$$(12.11) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, -v_x B_z, 0)$$

und

$$(12.12) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (v_x' B_z, 0, 0).$$

Damit reduziert sich Gl. (12.10) auf

$$(12.13) \quad v_x' B_z = -\frac{1}{R_M} B_x'',$$

wobei der Strich die Ableitung nach z symbolisieren soll. Wir erhalten also eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung für B_x als Funktion von z . Durch Integration ergibt sich

$$(12.14) \quad B_x'' = -B_z R_M v_x',$$

$$(12.15) \quad B_x' = -B_z R_M (v_x + C),$$

$$(12.16) \quad B_x = -B_z R_M \left(\int v_x dz + Cz + D \right),$$

wobei C, D Integrationskonstanten sind.

Als Beispiel nehmen wir ein zur Achse $z = 0$ symmetrisches Geschwindigkeitsprofil an und berechnen den stationären Zustand, den das Magnetfeld einnimmt. Es sei

$$(12.17) \quad v_x = \begin{cases} \cos z, & |z| \leq \pi/2, \\ 0, & |z| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$(12.18) \quad B_x = -B_z R_M (\sin z + Cz + D).$$

Als Randbedingungen des Feldes nehmen wir an:

$$(12.19) \quad B_x = 0 \text{ bei } z = 0 \quad (\text{also } D = 0),$$

$$(12.20) \quad B_x = 0 \text{ bei } z = \pi/2 \quad (\text{also } C = -2/\pi).$$

$B_x = 0$ am Rand bedeutet, daß die Tangentialkomponente von \mathbf{B} am Rand stetig ist, daß also kein Oberflächenstrom existiert. Das muß auch so sein, denn eine unendliche Stromdichte am Rand ist bei endlicher Leitfähigkeit unsinnig. Die Randbedingung (12.19) folgt aus Symmetriegründen. Mit den obigen Randbedingungen ergibt sich dann

$$(12.21) \quad B_x = -B_z R_M (\sin z - \frac{2}{\pi} z).$$

Zur Bestimmung des Verlaufes der Feldlinien definieren wir eine magnetische Stromfunktion ψ

$$(12.22) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -B_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = B_x.$$

Wie man leicht nachprüft, ist $\nabla \psi \cdot \mathbf{B} = 0$, die Linien $\psi = \text{const}$ sind also die Feldlinien. Durch Integration von Gl. (12.22) erhält man mit Gl. (12.21) die Gleichung der Feldlinien

$$(12.23) \quad \psi = B_z R_M (\cos z + \frac{1}{\pi} z^2) - B_z x.$$

Um die maximale Auslenkung Δx der Feldlinie durch den Materiestrom zu berechnen, nutzen wir aus, daß auf einer Feldlinie ψ konstant ist. Es ist also (vgl. Abb. 12.2)

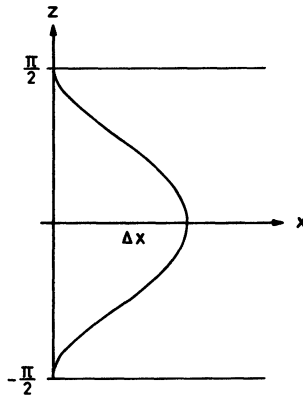


Abb. 12.2 Ausgelenkte Feldlinie in einem parallelen Geschwindigkeitsfeld mit Cosinusprofil gemäß Gl. (12.17).

$$(12.24) \quad \psi(\Delta x, 0) = \psi(0, \pi/2).$$

Daraus folgt mit Gl. (12.23)

$$(12.25) \quad \Delta x = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R_M.$$

Ist also R_M groß (etwa weil λ groß ist), dann ist die Ausbeulung auch groß. Man sieht: wenn R_M groß ist, müssen die Feldlinien stark gekrümmt sein, damit die Materie quer zum Feld fließen kann.

Wenn R_M durch einen endlichen Zahlenwert vorgegeben ist, dann kann wegen der endlichen Leitfähigkeit Materie quer zu den Feldlinien fließen. Sie kann es umso besser, je kleiner die für das Feld charakteristische Lineardimension ist, denn dann kann die Bedingung der eingefrorenen Feldlinien umso leichter verletzt werden. Wir sehen jetzt deutlicher, was wir schon eingangs aus Gl. (12.2) abgelesen hatten: Das Magnetfeld krümmt sich an jeder Stelle gerade in dem Maße, daß der Krümmungsradius der Feldlinien so klein wird, daß die Diffusionszeitskala klein genug ist, um die Materie mit der für diese Stelle vorgegebenen Geschwindigkeit quer zu den Feldlinien strömen zu lassen.

c) Die Weiss'schen Lösungen

N.O. Weiss (1966) hat numerisch zweidimensionale Lösungen der Gl. (12.8) für die zeitliche Entwicklung eines Magnetfeldes in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld bestimmt. Diese Lösungen geben einen sehr anschaulichen Eindruck, der noch verstärkt wird, wenn man Gelegenheit hat, den von ihm

hergestellten Film zu sehen^{*)}. Abb. 12.3 zeigt eine Serie von Einzelbildern daraus.

In Abb. 12.3 a ist das Strömungsfeld dargestellt. Die Materie bewegt sich nur im Innern und am Rand eines Quadrates, außerhalb ruht sie. Dementsprechend ist das Geschwindigkeitsfeld am Rand des Quadrates unstetig. Abb. 12.3 b zeigt den Anfangszustand, das homogene Magnetfeld.

In Abb. 12.3 c und d sieht man, wie die Feldlinien zunächst vom Plasma mitgenommen werden und sich mehr und mehr aufwickeln. Dabei entstehen Gebiete mit hohen Feldstärkegradienten, sowohl starke Krümmungen als auch dicht beieinanderliegende Feldlinien mit entgegengesetzter Richtung. Außerdem ändern sich die topologischen Verhältnisse. Teile von Feldlinien trennen sich ab und bilden geschlossene Linien (Abb. 12.3 e, f, g). Die geschlossenen Feldlinien selbst verschwinden dann. Dieser Prozeß läuft so lange ab, bis das ganze Quadrat, in dem sich die Materie bewegt, feldfrei ist (Abb. 12.3 o). Abb. 12.3 p zeigt dann den stationären Endzustand.

Wie ist dieser Vorgang zu verstehen? Solange das Feld ungestört war, waren die Feldlinien Geraden, die Lineardimension L des Feldes war unendlich. Die Feldlinien folgten der Bewegung der Materie. Durch die Ausbeulung des Feldes wird L kleiner. Mit kleinem L kann die Materie besser quer zum Feld schlüpfen; und umso weniger wird das Feld von der Materie mitgeführt. Schließlich stellt sich ein stationärer Endzustand ein in der Weise, daß das Feld gerade so schnell zurücktreibt, wie es von der Materie durchströmt wird. Dieser Endzustand ist eine stationäre Lösung der Gl. (12.8) ähnlich der Lösung vom Abschnitt b) dieses Paragraphen.

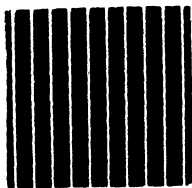
Das Innere des Strömungsgebietes wurde feldfrei, da die Feldlinien dort so stark gekrümmt wurden, daß sich entgegengesetzte Feldlinien auslöschen konnten wie in unserem Schachbrett-Gedankenexperiment. Die Feldenergie aus dem Innenbereich wurde dabei in Joulesche Wärme umgewandelt.

Im obigen Experiment wurde die Materie zu einer bestimmten Bewegung gezwungen. Ist diese Bewegung sehr kompliziert, wie etwa bei Turbulenz, so ist auch die Form des teilweise mitgeführten Feldes sehr kompliziert. Dann ist eine statistische Beschreibungsweise angemessen (vgl. § 14).

*) Eine Kopie dieses Filmes kann man im Institut für den wissenschaftlichen Film, 3400 Göttingen, Nonnenstieg 72, entleihen.



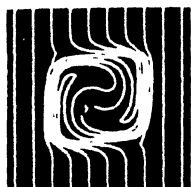
a



b



c



d



e



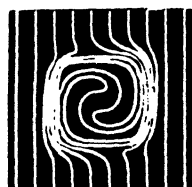
f



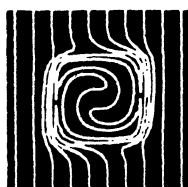
g



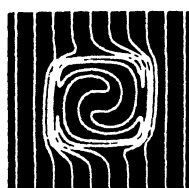
h



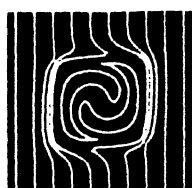
i



k



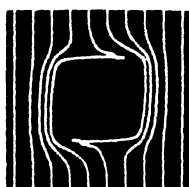
l



m



n



o



p

§ 13. Das Dynamo-Problem

An vielen Stellen des Weltraumes beobachten wir Magnetfelder: Die polarisierte *Synchrotronstrahlung* ferner Radiogalaxien, des Crabnebels und des Crabpulsars zeugen von starken Feldern, in denen hochenergetische Teilchen gyrieren. Die Ursache der *Polarisation des Sternlichts* sind Staubpartikel, die sich in interstellaren Magnetfeldern ausrichten. Magnetische Sterne, die Sonne mit ihren komplizierten magnetischen Erscheinungen und die Erde selbst mit ihrem Magnetfeld zeigen, daß fast überall, wo Materie auftritt, auch Magnetfelder sind. Wo kommen sie her? In manchen Körpern ist die Abklingzeit so groß, daß man ohne weiteres annehmen könnte, daß sie schon beim Urknall zusammen mit der Materie entstanden sind und daß seither noch nicht genügend Zeit verstrichen ist, um diese „fossilen“ Felder zerfallen zu lassen. Diese Hypothese ist sicher nicht richtig für die Sonne, bei der sich die magnetischen Erscheinungen alle 22 Jahre umpolen. So ein Vorgang wäre nur schwer zu verstehen, wenn man annähme, daß alle Magnetfelder der Sonne von Anfang an eingefroren sind. Wir wissen heute auch, daß sich das magnetische Erdfeld im Laufe der Erdgeschichte mehrfach umgepolt hat – was schlecht mit einem eingefrorenen Feld zu vereinbaren ist. Darüber hinaus würde die Leitfähigkeit im Erdinnern – soweit man sie abschätzen kann – überhaupt nicht ausreichen, ein Magnetfeld über mehrere Milliarden Jahre aufrecht zu erhalten.

So muß man die Frage stellen, ob die Magnetfelder im Kosmos auch direkt erzeugt werden können. Wir wissen ja aus der Technik, daß es möglich ist, Leiter und Isolatoren so anzuordnen, daß daraus ein *Dynamo* entsteht; eine Maschine also, bei der man mechanische Energie, die in der kinetischen Energie der beweglichen Teile der Apparatur sitzt, benutzen kann, um ein Magnetfeld zu erzeugen und gegen die Verluste (die von der endlichen Leitfähigkeit herühren) aufrecht zu erhalten. Könnte man nicht ähnliche Vorgänge in der Natur erwarten? Genügend kinetische Energie dafür ist vorhanden: einerseits etwa gespeichert in der Rotationsbewegung der Galaxien, Sterne und Planeten oder andererseits in den Sternen, in denen langsam oder explosionsartig freierwerdende Kernenergie die Materie in Bewegung versetzt. Kann bewegte Materie in der Natur vielleicht eine Art von Dynamo treiben, der ein Magnetfeld erzeugt und gegen die Verluste aufrecht erhält? Das ist das *Dynamo-Problem*.

Abb. 12.3 Zeitliche Entwicklung eines ursprünglich homogenen Magnetfeldes (*b*) in einem stationären Strömungsfeld (*a*). Die Abbildungen *b* bis *p* geben die Feldlinien zu verschiedenen Zeiten wieder (nach Weiss 1966).

a) Formulierung des Dynamo-Problems

Wir wollen die Problematik hier in vereinfachter Form betrachten. Wir fragen nicht, ob durch Bewegung von Materie ein Magnetfeld erzeugt, sondern ob ein schon vorhandenes Magnetfeld bei endlicher Leitfähigkeit aufrecht erhalten werden kann. Wie wir sehen werden, haben wir damit bereits ein sehr schwieriges Problem angeschnitten.

Ein Magnetfeld in Materie mit endlicher Leitfähigkeit zerfällt, seine Energie wird dissipiert. Was geschieht aber, wenn die Materie von außen zur Bewegung gezwungen wird? Wie wir später sehen werden (§ 15), übt ein Magnetfeld normalerweise eine Kraft auf bewegte, leitende Materie aus. Daher muß im allgemeinen bei der Bewegung Arbeit geleistet, also letztlich Energie in das magnetische Feld gesteckt werden. Diese Zufuhr wirkt dem Verlust an magnetischer Energie infolge der endlichen Leitfähigkeit entgegen. Kann man auf diese Weise durch Bewegen der Materie den Zerfall des Magnetfeldes verhindern?

Dabei ist es wichtig, daß sich die felderzeugenden Ströme im Endlichen befinden. Der Endzustand bei den Weiss'schen Lösungen in § 12 (vgl. Abb. 12.3o) ist *keine* Lösung des Dynamo-Problems. Dort hat man zwar ein stationäres Feld in bewegter Materie von endlicher Leitfähigkeit, ein Teil der Ströme fließt aber im Unendlichen, denn in großem Abstand von der Bildmitte wird das Feld homogen. Ein homogenes Feld wird von Strömen im Unendlichen erzeugt.

Auf den ersten Blick erscheint es verwunderlich, daß man nicht sofort ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} finden kann, das ein vorgegebenes Magnetfeld am Zerfallen hindert. Es scheint, als ob dazu nur geringfügige Bewegungen nötig wären. Schätzen wir zum Beispiel die Geschwindigkeit ab, die man braucht, um in der Sonne ein stationäres Magnetfeld aufrecht zu erhalten. In Gl. (12.2) hatten wir die Geschwindigkeit bestimmt, mit der sich die Materie im stationären Fall quer zum Feld bewegt. Wir können diese Gleichung auch deuten als Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit, die nötig ist, um ein zeitlich konstantes Magnetfeld aufrecht zu erhalten. Setzt man in Gl. (12.2) für L den Sonnenradius ein und setzt man $\lambda \approx 10^{16} \text{ sec}^{-1}$, so folgt

$$(13.1) \quad v = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{L} \approx 10^{-7} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Was die Größenordnung betrifft, genügen also ganz geringe Geschwindigkeiten, um die Diffusion der magnetischen Energie zu kompensieren. Die Schwierigkeit, eine Lösung zu finden, liegt darin, daß ihre topologische Struktur sehr kompliziert sein muß. Das werden wir im Folgenden sehen.

a) Der Satz von Cowling

Gegeben sei ein unendlich ausgedehntes Plasma mit endlicher Leitfähigkeit. Die felderzeugenden Ströme seien auf ein endliches Raumgebiet beschränkt. Wir zeigen, daß es keine geometrisch einfachen Lösungen gibt. Das folgt aus dem Satz von Cowling:

Ein axialsymmetrisches Magnetfeld, dessen Ströme im Endlichen liegen, kann durch kein Geschwindigkeitsfeld, dessen Betrag überall beschränkt ist, stationär aufrecht erhalten werden.

Beweis:

Gegeben sei ein axialsymmetrisches Magnetfeld, erzeugt von Strömen, die alle im Endlichen fließen. Wir betrachten die Meridianebene. Die Meridional-komponenten des Magnetfeldes können nach § 4 durch die Flußfunktion F beschrieben werden. Die Linien $F = \text{const}$ sind dann die Projektionen der magnetischen Feldlinien in die Meridianebene. Auf der Symmetrieachse ist $F = 0$ (Abb. 13.1). Wenn die das Feld erzeugenden Ströme im Endlichen liegen, müssen sich Feldlinien im Endlichen schließen, F besitzt also im Endlichen mindestens einen Extrempunkt. An diesem singulären Punkt ist $\nabla F = 0$.

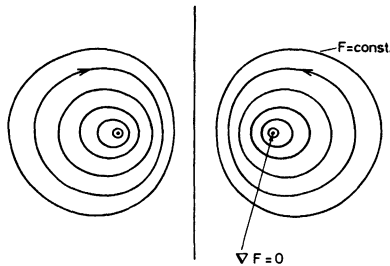


Abb. 13.1 Feldlinien eines axialsymmetrischen Feldes. Wenn der toroidale Strom, der das meridionale Feld erzeugt, im Endlichen liegt, dann müssen die Feldlinien $F = \text{const.}$ einen singulären Punkt umschließen, an dem ∇F verschwindet.

Wir betrachten eine beliebige Linie $F = \text{const.}$, die um den singulären Punkt herumläuft. Das Bogenlängen-Element auf dieser Feldlinie sei dl , ihre Gesamtlänge sei l . Die von der Feldlinie eingeschlossene Fläche sei f mit dem Flächenelement df . Wenn A eine beliebige, in der Meridianebene vorgegebene skalare Größe ist, definieren wir einen Mittelwert von A längs der Feldlinie gemäß

$$(13.2) \quad \bar{A} = \frac{1}{l} \oint A \, dl$$

und einen Mittelwert über die eingeschlossene Fläche in der Meridianebene nach

$$(13.3) \quad \bar{A} = \frac{1}{f} \iint_f A \, df.$$

Wir zerlegen den Vektor \mathbf{B} in einen toroidalen Anteil \mathbf{B}_t und einen meridionalen Anteil \mathbf{B}_m . Da das gerichtete Linienelement $d\mathbf{l}$ in der Meridianebene liegt, können wir auch schreiben ($|\mathbf{B}_m| = B_m$)

$$(13.4) \quad \bar{B}_m l = \oint \mathbf{B}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

Mit dem Stokesschen Satz und der Maxwell-Gleichung (9.1) ergibt sich daraus

$$(13.5) \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_f (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \iint_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}.$$

Hier ist $d\mathbf{f}$ das gerichtete Flächenelement von f ; es ist mit $d\mathbf{l}$ in der üblichen rechtssinnigen Weise verknüpft. Die toroidale Komponente der elektrischen Feldstärke muß aus Symmetriegründen verschwinden, denn da $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ist wegen der Stationarität des Magnetfeldes, kann \mathbf{E} nur durch Raumladungen erzeugt werden. Bei axialsymmetrischer Verteilung der Raumladungen verschwindet aber die toroidale Komponente von \mathbf{E} . Da $d\mathbf{f}$ in toroidale Richtung zeigt, ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz (9.4) (der Index t bezeichne die toroidale Komponente)

$$(13.6) \quad \frac{4\pi}{c} \iint_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \iint_f |j_t| \, df = \frac{4\pi\lambda}{c^2} \iint_f |(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t| \, df.$$

Nun ist aber

$$(13.7) \quad \begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t &= [(\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_m) \times (\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_m)]_t \\ &= [\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}_t + \mathbf{v}_t \times \mathbf{B}_m + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_t + \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_m]_t \\ &= \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_m. \end{aligned}$$

Da die Vektorprodukte von meridionalen und toroidalen Vektoren in der Meridianebene liegen, bleibt nur der letzte Term übrig. Also können wir abschätzen

$$(13.8) \quad \bar{B}_m l = \frac{4\pi\lambda}{c^2} \iint_f |\mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_m| df \leq \frac{4\pi\lambda}{c^2} v_{m,\max} \iint_f B_m df = \frac{4\pi\lambda}{c^2} v_{m,\max} \bar{\bar{B}}_m \cdot f.$$

Dabei ist $v_{m,\max}$ das Maximum des Betrages der poloidalen Geschwindigkeitskomponente.

Wir werden nun von einem Hilfssatz Gebrauch machen, den wir erst in c) beweisen werden. Hier wollen wir ihn jedoch veranschaulichen. Der Hilfssatz besagt, daß die Ungleichung

$$(13.9) \quad \bar{\bar{B}}_m < \bar{B}_m \cdot C^*$$

gilt. Damit meinen wir: Für eine (hinreichend nahe um den singulären Punkt herumführende) Feldlinie F^* existiert immer eine Konstante C^* so, daß die Ungleichung (13.9) erfüllt ist. Für alle Feldlinien mit $F < F^*$ gilt die Ungleichung zwischen $\bar{\bar{B}}_m$ und \bar{B}_m mit *derselben* Konstanten C^* . Mit anderen Worten: $\bar{\bar{B}}_m$ geht am singulären Punkt nicht stärker nach Null als \bar{B}_m .

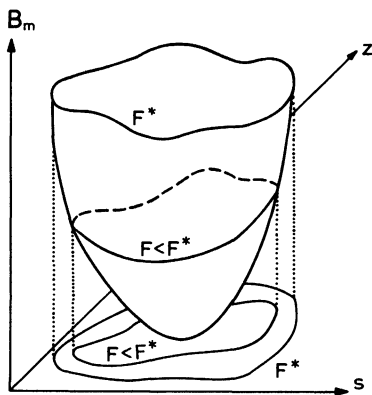


Abb. 13.2 Die Stärke B_m der meridionalen Komponente des Magnetfeldes in einer kleinen Umgebung des singulären Punktes.

Diesen Hilfssatz kann man sich leicht plausibel machen: In Abb. 13.2 ist die Funktion $B_m = |\mathbf{B}_m|$ über der Meridianebene dargestellt. Da am singulären Punkt B_m verschwindet, muß in unmittelbarer Nachbarschaft dieses Punktes B_m zunächst nach außen hin ansteigen. In einer genügend kleinen Umgebung hat also B_m qualitativ den in Abb. 13.2 wiedergegebenen Verlauf. Jeder Feldlinie $F = \text{const.}$ entspricht auf der B_m -Fläche eine geschlossene Kurve. Die

Aussage (13.9) bezieht sich auf Mittelwerte von B_m , die einmal über Feldlinien $F = \text{const.}$ und das andere Mal über die von Feldlinien umschlossenen Teile der Meridianebene genommen werden. Ein vorgegebenes $F = \text{const.}$ liefert eine bestimmte Feldlinie. Wenn man nun zu immer engeren Feldlinien geht (also zu immer kleineren Werten von F), dann – so wird durch die Bedingung (13.9) behauptet – geht der Mittelwert über die Linie nicht schneller nach Null als der Mittelwert über die Fläche.

Wir werden diese Aussage später beweisen. Zur Veranschaulichung bringen wir hier schon gleich einen einfachen Spezialfall, für den die Behauptung unmittelbar einsichtig ist: Wenn die Feldlinien in der Nachbarschaft des singulären Punktes konzentrische Kreise um den singulären Punkt sind, dann sind die Linien $B_m = |\nabla F| = \text{const.}$ auch Kreise. Die B_m -Fläche in Abb. 13.2 ist also rotationssymmetrisch um eine zur B_m -Achse parallele, durch den singulären Punkt gehende Gerade. Da nun B_m auf jeder Feldlinie konstant ist und da im Innern der (kreisförmigen) Feldlinie B_m nur niedrigere Werte annehmen kann, so folgt $\bar{B}_m < \bar{B}_m$. Hier ist die Ungleichung (13.9) sogar mit $C^* = 1$ erfüllt.

Für das Folgende nehmen wir an, die Ungleichung (13.9) sei schon bewiesen. Kombinieren wir nun Gl. (13.8) mit Gl. (13.9), so folgt nach Division durch \bar{B}_m

$$(13.10) \quad l < \frac{4\pi\lambda}{c^2} v_{m,\max} \cdot f \cdot \text{const.},$$

wobei die Konstante rechts für alle betrachteten Feldlinien die gleiche ist. Diese Ungleichung kann aber in beliebiger Nähe des singulären Punktes nicht erfüllt sein, da wegen $f \sim l^2$ die rechte Seite bei Annäherung an den singulären Punkt schneller gegen Null geht als die linke Seite. Gl. (13.10) kann in beliebiger Nähe des singulären Punktes nur richtig bleiben, wenn $v_{m,\max}$ dort gegen Unendlich geht, das ist aber ausgeschlossen.

Wie man auch bei anderen Beweisen des Cowlingschen Theorems sieht, scheitert der axialsymmetrische Dynamo immer am singulären Punkt $\nabla F = 0$. Nur wenn dort die Geschwindigkeit unendlich würde, könnte man aus den Schwierigkeiten herauskommen. Das ist auch anschaulich klar. In der Abschätzung (13.1) für die für den stationären Sonnendynamo notwendige Geschwindigkeit haben wir als charakteristische Lineardimension L den Sonnenradius genommen. In der Nähe des singulären Punktes ist die charakteristische Lineardimension (also etwa der Krümmungsradius der Linien $F = \text{const.}$) der Abstand zum singulären Punkt. L geht also nach Null, wenn man sich dem singulären Punkt nähert, und dementsprechend geht die für die Aufrechterhaltung der Stationarität nötige Geschwindigkeit gemäß Gl. (13.1) nach Unendlich.

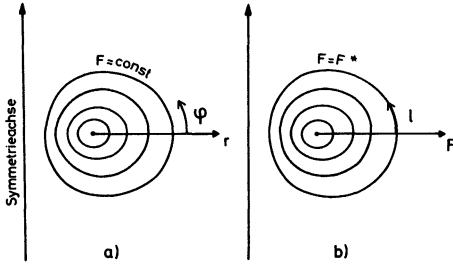


Abb. 13.3 Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme (r, φ) und (F, l) . In a) und b) sind dieselben Feldlinien in der Meridianebene aufgetragen. Während man links gewöhnliche Polarkoordinaten mit dem singulären Punkt als Ursprung hat, sind rechts neue Koordinaten F, l eingeführt.

c) Beweis des Hilfssatzes

Wir führen dazu in der Meridianebene Polarkoordinaten r, φ ein. Dabei weise die Richtung $\varphi = 0$ senkrecht von der Symmetrieachse fort, r sei der Abstand vom singulären Punkt, wo F ein Extremum hat (Abb. 13.3 a). Die Feldlinien $F = \text{const}$ sind natürlich im allgemeinen keine Kreise, sie haben aber dieselbe Topologie wie Kreise $r = \text{const}$. F habe sein Minimum an der Stelle $r = 0$, der Wert von F sei dort $F_1 = F(r=0)$.

Wir definieren jetzt eine neue Flußgröße $\tilde{F} = F - F_1$, die sich von F nur durch eine additive Konstante unterscheidet. Alle folgenden Betrachtungen werden in dieser neuen Variablen \tilde{F} durchgeführt; der Einfachheit halber lassen wir die Schlange wieder fort. Wir setzen dann voraus, daß F wie eine Potenz von r nach Null geht:

$$(13.11) \quad F \sim r^n \quad (n > 1)$$

F unterscheidet sich also von r^n nur durch einen bei $r = 0$ regulären und von Null verschiedenen Faktor.

Wir führen nun in der Meridianebene ein zweites Koordinatensystem ein: Auf jeder Feldlinie kann man von $\varphi = 0$ ausgehend die Bogenlänge l abmessen. Es ist $l = l(r, \varphi)$. Offenbar kann man jedem Punkt der Meridianebene auf eindeutige Weise ein Wertepaar F, l zuordnen. In diesem Sinne kann man auch F, l als Koordinaten in derselben Meridianebene benutzen (Abb. 13,3 b).

In den beiden obigen Koordinatensystemen berechnen wir jetzt die Fläche innerhalb einer beliebigen, aber festen Feldlinie F^* . Wenn $l(F)$ die Länge einer Feldlinie ist, die zum Wert $F < F^*$ gehört, so erhält man

$$(13.12) \quad f^* = \iint_{f(F^*)} r \, d\varphi \, dr = \int_0^{F^*} \int_0^{l(F)} J(l, F) \, dl \, dF.$$

Dabei ist J die Jacobische Funktional-Determinante

$$(13.13) \quad J = \frac{\partial r}{\partial F} \frac{\partial r \varphi}{\partial l} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r \varphi}{\partial F} ,$$

die durch Umrechnung der beiden Koordinatensysteme entsteht. Es interessiert nun das asymptotische Verhalten von J am singulären Punkt. Wegen Gl. (13.11) gilt in der Nähe von $r = 0$:

$$(13.14) \quad dF \sim r^{n-1} dr .$$

Also folgt

$$(13.15) \quad r d\varphi dr \sim r d\varphi r^{1-n} dF ,$$

und wegen

$$(13.16) \quad dl \sim r d\varphi$$

erhalten wir aus Gl. (13.13)

$$(13.17) \quad J \sim r^{1-n} .$$

Wir können also J schreiben in der Form

$$(13.18) \quad J = \tilde{I}(r, \varphi) r^{1-n} = I(F, l) F^{\frac{1-n}{n}} ,$$

wobei \tilde{I} bzw. I endliche Funktionen am singulären Punkt sind.

Den Mittelwert $\bar{\bar{B}}_m$ über die Fläche f^* kann man damit wie folgt abschätzen:

$$(13.19) \quad \begin{aligned} \bar{\bar{B}}_m &= \frac{1}{f^*} \int_0^{F^*} \int_0^{l(F)} B_m J dl dF \\ &< \frac{I_{\max}}{f^*} \int_0^{F^*} \left[\int_0^{l(F)} B_m(F, l) dl \right] F^{\frac{1-n}{n}} dF , \end{aligned}$$

denn $I(F, l)$ ist als reguläre Funktion durch den Maximalwert I_{\max} über der Fläche f^* abschätzbar.

Da nun wegen der Form (13.11) von F B_m in der Umgebung von $r = 0$ regulär und positiv ist, gilt: Auf den Orthogonaltrajektorien zu den Feldlinien wächst B_m monoton nach außen (vgl. Abb. 13.4).

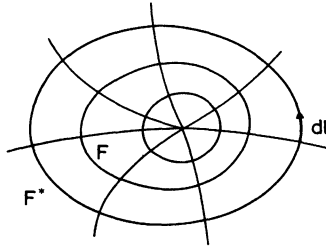


Abb. 13.4 Die Linien $F = \text{const.}$ in der Meridianebene (vgl. Abb. 13.2). Wenn man vom singulären Punkt aus auf den Orthogonaltrajektorien (von denen einige eingezeichnet sind) nach außen geht, nimmt B_m monoton zu.

Ersetzen wir also die Werte $B_m(F, l)$ auf den inneren F -Linien durch die Maximalwerte $B_m(F^*, l)$ auf den äußeren Feldlinien F^* , so gilt die Abschätzung:

$$(13.20) \quad \int_0^{l(F)} B_m(F, l) dl < \int_0^{l(F)} B_m(F^*, l) dl,$$

denn B_m nimmt nach außen monoton zu und ist stetig. Strecken wir jetzt das Integrationsintervall $l(F)$ auf die Länge $l(F^*)$ der äußersten betrachteten Feldlinie, so gilt weiter

$$(13.21) \quad \int_0^{l(F)} B_m(F^*, l) dl < \int_0^{l(F^*)} B_m(F^*, l) dl = \bar{B}_m(F^*) \cdot l(F^*).$$

Durch Einsetzen in Gl. (13.19) erhalten wir schließlich

$$(13.22) \quad \begin{aligned} \bar{B}_m < \frac{I_{\max}}{f^*} \int_0^{F^*} l(F^*) \bar{B}_m(F^*) F^{\frac{1-n}{n}} dF \\ &= \frac{n}{f^*} I_{\max} \cdot l(F^*) \cdot F^{*1/n}. \end{aligned}$$

Wenn wir die Feldlinien immer enger um den singulären Punkt zusammenziehen, dann gilt immer noch für jeden Wert von $F < F^*$ eine Ungleichung der Form $\bar{B}_m < A(F) \bar{B}_m$ mit

$$(13.23) \quad A(F) = \frac{n}{f} I_{\max} l(F) F^{1/n}$$

Dabei ist f die von der Feldlinie $F = \text{const.}$ eingeschlossene Fläche der Meridianebene. Beim Übergang $F \rightarrow 0$ bleibt $A(F)$ endlich. In der Tat ist $f \sim r^2$, $l(F) \sim r$ und $F^{1/n} \sim r$, also bleibt $A(F)$ regulär. Damit läßt sich $A(F)$ durch eine obere Schranke abschätzen $A(F) < C^*$ für $0 \leq F \leq F^*$, und damit folgt die Behauptung (13.9).

§ 14. Statistische Dynamotheorie

In letzter Zeit hat man – dank der Arbeiten von Parker (1970 a), Krause, Steenbeck und ihrer Mitarbeiter (Krause, Rädler 1971) – einige Fortschritte in der Dynamotheorie gemacht. Der wichtigste neue Punkt gegenüber den älteren Versuchen, Dynamos zu konstruieren, ist, daß man *statistische Geschwindigkeitsfelder* betrachtet. Man hat ja in Sternen Konvektionszonen, in denen heiße Turbulenzelemente in statistischer Weise aufsteigen, abkühlen und wieder absinken. Dementsprechend bedient man sich einer statistischen Beschreibungsweise. (Wegen einer einfachen Zusammenfassung vgl. auch Deinzer 1971.)

a) Elektrodynamik mittlerer Felder

Es sei $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ das Geschwindigkeitsfeld als Funktion des Ortes \mathbf{r} und der Zeit t . Dann kann man \mathbf{v} an jeder Stelle über hinreichend lange Zeit mitteln und erhält einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\mathbf{v}}$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die statistische Bewegung im Mittel stationär sei, daß also $\bar{\mathbf{v}}$ nur noch vom Ort abhängt. Es existiert eine eindeutige Aufspaltung.

$$(14.1) \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}',$$

wo \mathbf{v}' den fluktuierenden Anteil des Geschwindigkeitsfeldes darstellt. Per definitionem verschwindet der zeitliche Mittelwert von \mathbf{v}' , es ist $\overline{\mathbf{v}'} = 0$.

Wenn jetzt \mathbf{u} ein zweites fluktuierendes Feld ist, dann folgt für das Skalarprodukt

$$(14.2) \quad \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} = \overline{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{v}}} + \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}$$

Der letzte Term verschwindet, wenn die beiden Felder nicht miteinander korreliert sind. Um das zu sehen, denke man sich das bei der Mittelwertbildung auftretende Integral durch eine Summe angenähert:

$$(14.3) \quad \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' dt = \frac{1}{\tau} \sum_i \mathbf{u}'(t_i) \cdot \mathbf{v}'(t_i) \cdot \Delta t \quad (t_i = t_{i-1} + \Delta t).$$

τ ist dabei das Zeitintervall, über das gemittelt wird.

Wenn wir nun einen bestimmten Wert von \mathbf{u}' festhalten, so wird er in der Summe mit allen denkbaren Werten von \mathbf{v}' multipliziert auftreten. Unter diesen Werten von \mathbf{v}' gibt es genausoviel positive wie negative, sie werden sich also in der Summe aufheben.

Das gilt für jeden Wert von \mathbf{u}' , so daß die in Gl. (14.3) gegebene Summe insgesamt verschwindet. Also ist $\overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'} = 0$ bei unkorrelierten Feldern. Als einfachstes Beispiel von korrelierten Feldern wählen wir $\mathbf{u}' = \mathbf{v}'$. Dann wird $\overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'} = \overline{v'^2} > 0$. Allgemein verschwindet $\overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}$ nur dann nicht, wenn bestimmte Werte von \mathbf{v}' bevorzugt mit bestimmten Werten von \mathbf{u}' auftreten. Dann heben sich die einzelnen Glieder, die zur Mittelbildung beitragen, nicht mehr vollständig auf.

Entsprechend der Gl. (14.2) gilt auch

$$(14.4) \quad \overline{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'},$$

und der letzte Term verschwindet, wenn die beiden Felder nicht korreliert sind.

Ein Magnetfeld, das sich mit der statistisch bewegten Materie mitbewegt (sich aber wegen der endlichen Leitfähigkeit auch relativ zur Materie bewegen kann), variiert dann auch statistisch und läßt sich gleichfalls aufspalten in der Form

$$(14.5) \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'.$$

Das gleiche gilt für \mathbf{j} und \mathbf{E} . Die Maxwell-Gleichungen gelten wegen ihrer Linearität auch für die gemittelten Größen. Man hat jetzt eine Elektrodynamik der mittleren Felder. Anders jedoch das Ohmsche Gesetz:

$$(14.6) \quad \mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{j}' = \lambda [\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}' + \frac{1}{c} (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \times (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')].$$

Nimmt man davon den Mittelwert, so bleibt wegen

$$(14.7) \quad \bar{j} = 0, \bar{E} = 0, \bar{v} = 0, \bar{B} = 0$$

die Beziehung

$$(14.8) \quad \bar{j} = \lambda \left[\bar{E} + \frac{1}{c} (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{c} (\overline{v' \times B'}) \right].$$

Man erhält also für die Mittelwerte von j , E , v und B wieder einen Zusammenhang von der Form des Ohmschen Gesetzes (9.4), bekommt aber noch ein Zusatzglied

$$(14.9) \quad \frac{1}{c} (\overline{v' \times B'}).$$

Es ist ein Mittelwert über ein Produkt, dessen Faktoren im Mittel gleich null sind. Nur wenn v' und B' voneinander unabhängig wären, würde dieses Glied verschwinden; das ist aber nicht der Fall. Die Fluktuationen des Magnetfeldes werden ja hervorgerufen von der fluktuierenden Bewegung der Materie, die durch das Geschwindigkeitsfeld v' gegeben ist. Man kann also nicht erwarten, daß im Produkt (14.9) die Geschwindigkeit v' mit einem Feldvektor B' genauso wahrscheinlich gekoppelt ist wie mit $-B'$. Deshalb wird $\overline{v' \times B'}$ im allgemeinen nicht verschwinden. Es tritt also ein neues Glied im Ohmschen Gesetz auf; dieses Glied enthält Einzelheiten der fluktuierenden Felder. Im allgemeinen Fall ist es nicht einfach zu bestimmen, trotzdem läßt sich einiges über die Struktur dieses Gliedes aussagen.

Dazu nehmen wir an, daß das Geschwindigkeitsfeld im Mittel verschwindet, also $\bar{v} = 0$ ist. Ferner nehmen wir an, daß das fluktuierende Geschwindigkeitsfeld homogen und isotrop ist. Es sollen also im Mittel kein Raumpunkt und keine Richtung ausgezeichnet sein. Wir setzen $B = \bar{B} + B'$ und $v = \bar{v} + v'$ in die Gleichung ein, die das zeitliche Verhalten des Magnetfeldes beschreibt, also in

$$(14.10) \quad \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta B + \nabla \times (v \times B) - \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

Wir erhalten dann wegen $\bar{v} = 0$

$$(14.11) \quad \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta B' + \nabla \times (v' \times B') - \frac{\partial B'}{\partial t} = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \bar{B} - \nabla \times (v' \times \bar{B}) + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Wir diskutieren nun Lösungen \mathbf{B}' dieser Gleichung zu vorgegebenen Feldern \mathbf{v}' und $\bar{\mathbf{B}}$. Wir wollen die Differentialgleichung jedoch nicht lösen, sondern nur gewisse allgemeinere Aussagen über \mathbf{B}' in Abhängigkeit von $\bar{\mathbf{B}}$ aus ihr gewinnen.

Gl. (14.11) bleibt richtig, wenn man $\bar{\mathbf{B}}$ und \mathbf{B}' gleichzeitig mit demselben Zahlenfaktor multipliziert; die fluktuierende Lösung \mathbf{B}' hängt also homogen vom mittleren Feld $\bar{\mathbf{B}}$ ab. Wie man aus Gl. (14.11) sieht, hängt \mathbf{B}' auch nur linear von $\bar{\mathbf{B}}$ ab; bei linearer Supersposition mehrerer mittlerer Magnetfelder überlagern sich die zugehörigen fluktuierenden Magnetfelder.

Aus der Differentialgleichung (14.11) läßt sich also im Prinzip ein Ausdruck für \mathbf{B}' gewinnen, der linear und homogen von $\bar{\mathbf{B}}$ abhängt. (Er hängt natürlich auch noch von \mathbf{v}' ab, aber das interessiert hier nicht.) Also hängt auch $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ linear und homogen von $\bar{\mathbf{B}}$ ab, und da diese Eigenschaft auch bei Mittelwertbildung erhalten bleibt, ist $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ bezüglich $\bar{\mathbf{B}}$ linear und homogen.

Im allgemeinen hängt die Lösung einer linearen inhomogenen partiellen Differentialgleichung vom Verhalten des inhomogenen Gliedes im ganzen Raum ab. Man denke dabei nur an die Lösungen der Poisson-Gleichung! Ebenso hängt die Lösung \mathbf{B}' der Gl. (14.11) von den Werten der Funktionen $\bar{\mathbf{B}}$ und \mathbf{v}' im ganzen Raum ab.

Wir wollen hier aber als eine Näherung voraussetzen, daß der Wert von \mathbf{B}' und damit der von $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ an einer bestimmten Stelle des Raumes nur von den Feldern $\bar{\mathbf{B}}$ und \mathbf{v}' in einer kleinen Umgebung dieser Stelle abhängt. Dann können wir annehmen, daß im Ausdruck für $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ an einer Stelle P neben $\bar{\mathbf{B}}(P)$ selbst nur noch räumliche erste Ableitungen (genommen an der Stelle P) der Komponenten von $\bar{\mathbf{B}}$ auftreten.

Damit stehen wir vor der Aufgabe, für $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ ein Vektorfeld zu finden, das linear und homogen in $\bar{\mathbf{B}}$ und seinen ersten Ableitungen ist. (Wegen $\bar{\mathbf{v}} = 0$ und der vorausgesetzten Homogenität und Isotropie kommen $\bar{\mathbf{v}}$ und seine Ableitungen dabei nicht vor.) Da es darum geht, ein Vektorfeld zu finden, muß man fragen, welche Vektoren gebildet werden können, die die Ableitungen der Komponenten von $\bar{\mathbf{B}}$ linear und homogen enthalten. Wie kann man den Vektoroperator $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ mit $\bar{\mathbf{B}}$ verknüpfen, um wieder einen Vektor zu erhalten? Die einzige Möglichkeit ist $\nabla \times \bar{\mathbf{B}}$. Damit folgt, daß $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ eine Linearkombination der Vektoren $\bar{\mathbf{B}}$ und $\nabla \times \bar{\mathbf{B}}$ sein muß. Man könnte noch erwarten, daß auch noch Beiträge vom Feld \mathbf{v}' in $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ eine Rolle spielen. Sicherlich kann es aber keine vektoriellen Beiträge dieser Art geben, denn durch Mittelbildung läßt sich aus dem Vektorfeld \mathbf{v}' kein Vektor gewinnen. Solch ein Vektor würde in jedem Raumpunkt in eine bestimm-

te Richtung weisen, was mit der Isotropie der turbulenten Bewegung in Widerspruch stünde. Wohl aber kann man aus \mathbf{v}' durch Mittelbildung Skalare bilden, wie etwa $\overline{v'^2}$.

Damit bleibt, daß sich $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$ in der Form

$$(14.12) \quad \overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}$$

schreiben lassen muß. Dabei hängen die skalaren Koeffizienten α und β nicht mehr vom Feld $\bar{\mathbf{B}}$ ab (sonst wäre die Linearität in $\bar{\mathbf{B}}$ gestört), wohl aber hängen sie noch vom Feld \mathbf{v}' ab.

Wenn man α und β im einzelnen berechnen will, muß man für ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}' den Ausdruck $\overline{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'}$ durch $\bar{\mathbf{B}}$ und $\nabla \times \bar{\mathbf{B}}$ darstellen. Dabei ergibt sich, was hier nicht hergeleitet werden soll, daß α gerade dann nicht verschwindet, wenn die Turbulenzelemente bei ihrer Bewegung systematisch einen gewissen Drehsinn besitzen. Damit ist gemeint, daß alle Turbulenzelemente eine Art Schraubenbewegung mit einem bevorzugten Schraubensinn ausführen, unabhängig von ihrer sonstigen räumlichen Bewegung. Das ist nicht eine so künstliche Annahme, wie es auf den ersten Blick scheint; wir werden weiter unten zeigen, daß die turbulente Bewegung in Konvektionszonen von rotierenden Sternen einen derartigen bevorzugten Schraubensinn hat.

b) Konvektion mit Schraubenbewegung

Für das Folgende nehmen wir an, bei der Bewegung der Materie sei ein bestimmter Drehsinn ausgezeichnet. Wenn ein Materieballen aufsteigt, dann soll er sich gleichzeitig um eine zu seiner Bewegungsrichtung parallele Achse drehen, und dieser Drehsinn soll für alle aufsteigenden Turbulenzelemente derselbe sein. Wir wollen hier noch nicht begründen, woher solch eine spezielle Bewegungsart kommt; wir nehmen sie als gegeben an und fragen, welche Folgen das auf unser neues Ohmsches Gesetz (14.8) hat.

Wenn durch die Turbulenzbewegung ein Materieballen aufsteigt, nimmt er Feldlinien mit. Die mit nach oben geführten Feldlinien werden dann entsprechend mitgedreht, wie es in Abb. 14.1 schematisch dargestellt ist. Jede Feldlinie wird also durch die turbulente Materie so verdreht, daß sie eine Schleife bildet. Diese Schleife hat zur Folge, daß der Strom $\mathbf{j} = c \nabla \times \mathbf{B}/4\pi$ eine Komponente entgegen der Richtung des ursprünglichen (mittleren) Feldes bekommt. Das aber wird gerade durch den Term $\alpha \bar{\mathbf{B}}$ in Gl. (14.12) ausgedrückt, denn setzt man Gl. (14.12) in Gl. (14.8) ein, so folgt

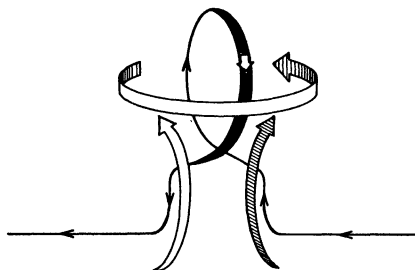


Abb. 14.1 Verformung einer Feldlinie durch ein aufsteigendes und sich um eine zur Aufstiegsrichtung parallele Achse drehendes Materieelement (nach Parker 1970b).

$$(14.13) \quad \bar{\mathbf{j}} = \lambda \left[\bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \frac{\alpha}{c} \bar{\mathbf{B}} - \frac{\beta}{c} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \right].$$

Der mit α behaftete Term liefert eine Stromkomponente parallel oder antiparallel (je nach dem Vorzeichen von α) zum mittleren Feld $\bar{\mathbf{B}}$. Das Auftreten eines zusätzlichen Stromes in Richtung von $\bar{\mathbf{B}}$ nennt man den „ α -Effekt“.

Der mit β behaftete Term läßt sich auch deuten: Dazu schreiben wir Gl. (14.13) mit Hilfe von $\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = 4\pi \bar{\mathbf{j}}/c$ um in

$$(14.14) \quad \bar{\mathbf{j}} = \lambda_T \left[\bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) + \frac{\alpha}{c} \bar{\mathbf{B}} \right],$$

wobei wir

$$(14.15) \quad \frac{1}{\lambda_T} = \frac{1}{\lambda} + \frac{4\pi}{c^2} \beta$$

gesetzt haben. Man kann zeigen (Krause, Rädler 1971), daß β positiv ist; das β -Glied verringert also die Leitfähigkeit. Im Gegensatz zur substanzeigenen Leitfähigkeit λ spricht man dann von der *turbulenzbedingten Leitfähigkeit* $\lambda_T < \lambda$. λ_T ist in jedem Fall endlich, auch wenn λ beliebig groß ist.

In der Tat muß man erwarten, daß das mittlere Magnetfeld bei turbulenter Bewegung schneller verschwindet, als es der Zeitskala $\tau = 4\pi\lambda L^2/c^2$ entspricht. Die statistische Bewegung bringt ja verschiedene Feldrichtungen räumlich nahe zusammen, sie „zerzaust“ das ursprüngliche Feld. Auch treten an der gleichen Stelle im Raum in kurz aufeinanderfolgenden Zeiträumen Felder verschiedener Richtungen auf, die sich bei der Bildung von $\bar{\mathbf{B}}$ teilweise aufheben. Dadurch wird die für das Feld charakteristische Lineardimension L ver-

kleinert und die Zerfallszeit des Feldes stark herabgesetzt. Im Prinzip ist es das Gleiche wie bei unserem Beispiel mit dem Schachbrett in § 11. Statt der Zerfallszeit τ für das Feld \mathbf{B} hat man jetzt die Zerfallszeit $\tau_T = 4\pi\lambda_T L^2/c^2 < \tau$ für das Feld $\bar{\mathbf{B}}$.

c) Einfache Dynamos

Wenn in einem turbulenten Plasma die fluktuierende Bewegung einen bestimmten Drehsinn auszeichnet, gestatten die elektrodynamischen Eigenschaften dieses Mediums, einen Dynamo zu konstruieren. Wir geben im folgenden einige Beispiele für die Wirkung des α -Effekts. Dabei wollen wir uns immer noch nicht mit der Frage befassen, woher die turbulente Bewegung den Drehsinn erhält. Wir nehmen also ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld als gegeben an, dessen Turbulenzelemente eine Schraubenbewegung ausführen. Die folgenden Beispiele stammen von Krause und Rädler (1971).

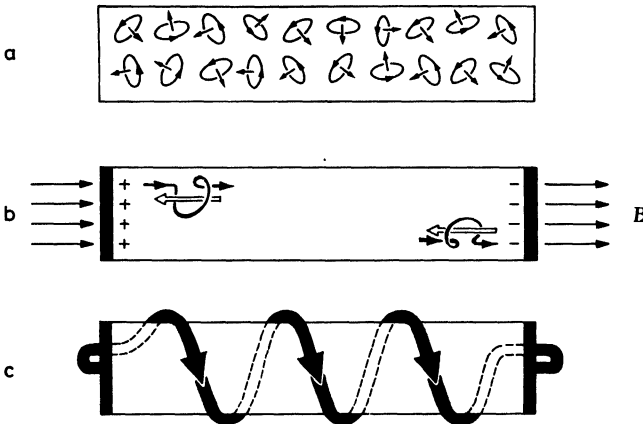


Abb. 14.2 Konstruktion eines Dynamos mit turbulenter Materie eines bevorzugten Schraubensinns. a) zeigt schematisch die statistische Orientierung der Turbulenzelemente (alle ausgestattet mit rechtsgemrichtetem Schraubensinn). Legt man ein homogenes Magnetfeld an den Kasten (b), so erzeugen die zu Schleifen deformierten Feldlinien alle einen Strom antiparallel zum Feld. Dieser Strom wiederum erzeugt Raumladungen an den Kastenenden, die man durch eine geeignete leitende Verbindung (c) zu einem feldverstärkenden Strom ausnutzen kann (nach Krause und Rädler 1971).

Gegeben sei ein Kasten, der ein in turbulenter Bewegung befindliches Medium enthalte, bei dem rechtshändige Schraubenbewegungen bevorzugt auftreten (Abb. 14.2a). Ein homogenes Magnetfeld werde von außen angelegt. Es erscheinen dann die Schleifen, wie wir sie von Abb. 14.1 her kennen, in

den verschiedensten Lagen. Eines allerdings ist allen gemeinsam: Es tritt immer eine zum Magnetfeld antiparallele Komponente des elektrischen Stromes auf. (Wegen des rechtshändigen Windungssinnes der Schrauben ist $\alpha < 0$.) Diese sorgt für eine Ansammlung von Ladungen an den Enden des Kastens (Abb. 14.2b). Ein Beobachter würde feststellen, daß die in dem Kasten befindliche Materie die Eigenschaft hat, eine elektrische Feldstärke parallel zum angelegten Magnetfeld aufzubauen. Um nun eine Dynamowirkung zu bekommen, braucht man jetzt nur noch die seitlichen Begrenzungen des Kastens leitend zu verbinden und diese Leitung in Windungen mit ebenfalls rechtshändigem Schraubensinn um den Kasten zu führen (Abb. 14.2c). Dann wird, jedenfalls bei genügender Stärke der Effekte, das Magnetfeld, das für die Spannung sorgt, von dem durch die Wicklung fließenden Strom selbst aufgebaut.

Ein anderes einfaches Beispiel, das die Dynamowirkung zeigt, ist in Abb. 14.3 dargestellt.

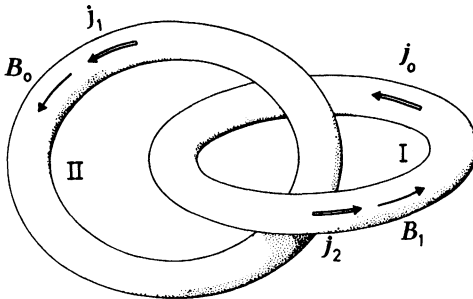


Abb. 14.3 Modell zum Aufbau eines selbsterregten Magnetfeldes in Materie mit dem Ohmschen Gesetz.

Zwei leitende Ringe mögen in der gezeigten Weise in ein elektrisch und magnetisch nicht leitendes Medium eingebettet sein. Die mittlere Geschwindigkeit in diesem Medium möge verschwinden ($\bar{v} = 0$). In den Ringen gelte ein Ohmsches Gesetz der Form $\mathbf{j} = \lambda_T (\mathbf{E} + \frac{\alpha}{c} \mathbf{B})$ mit $\alpha \neq 0$. (Die Mittelungsstriche lassen wir von jetzt an fort, es sind immer gemittelte Größen gemeint.) Wir gehen von einem Strom j_0 in Ring I aus, der von einem Magnetfeld B_0 im Ring II begleitet wird. Dieses hat wegen des α -Effektes den Strom j_1 in Ring II zur Folge und dieser wieder ein Feld B_1 in Ring I. B_1 bedingt (wieder wegen des α -Effektes) einen Strom j_2 , der den ursprünglichen Strom verstärkt. Dieser Mechanismus läuft unabhängig davon, ob B_0 und j_1 bzw. B_1 und j_2 parallel ($\alpha > 0$) oder antiparallel ($\alpha < 0$) sind. Es ist also auch hier möglich, daß Ströme und Magnetfelder trotz Ohmscher Verluste nicht abklingen, sondern sich

möglicherweise sogar noch verstärken. Das ist aber gerade die gewünschte Dynamowirkung.

d) Drehsinn und Turbulenz in rotierenden Systemen

Bisher haben wir die Schraubenbewegung der Turbulenzelemente als vorgegeben angesehen, ohne uns um die Ursache dafür zu kümmern. Die große Bedeutung des α -Effekts liegt darin, daß er bei Turbulenz in einem rotierenden System ganz von selbst auftritt. Denken wir uns einen Materieballen in der äußeren Konvektionszone der Sonne. Wenn er aufsteigt, kommt er in Zonen niedrigeren Gasdruckes. Er wird also expandieren. Bei dieser Expansionsbewegung muß sich ein Teil seiner Materie horizontal in Nord-Südrichtung bewegen. Diese Materie ist aber auf der rotierenden Sonne der Corioliskraft ausgesetzt: Der aufsteigende Ballen erhält eine Drehbewegung um eine lotrechte Achse, das ist genau die Art von Drehbewegung, die für den α -Effekt notwendig ist! Die Rotation erzeugt in der Konvektionszone der Sonne einen α -Effekt. In der Tat ist es möglich, in der Sonne mit Hilfe dieses Effektes ein Magnetfeld stationär aufrecht zu erhalten, auch im Fall von axialsymmetrischen mittleren Feldern. Daß man damit nicht im Widerspruch zum Cowlingschen Theorem kommt, liegt daran, daß man jetzt ein anderes Ohmsches Gesetz hat.

Tatsächlich versagt der Beweis des Cowlingschen Theorems, wenn man das Ohmsche Gesetz in der Form

$$(14.16) \quad \mathbf{j} = \lambda_T \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\alpha}{c} \mathbf{B} \right]$$

annimmt. Das Zusatzglied in Gl. (14.16) wird sofort wichtig, wenn man entsprechend dem Cowlingschen Theorem zu zeigen versucht, daß für axialsymmetrische *mittlere* Felder kein Dynamo möglich ist. Wir gehen dazu in die Gleichung (13.6) und erhalten jetzt

$$(14.17) \quad \frac{4\pi}{c} \iint_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi\lambda_T}{c^2} \iint_f \mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_m \cdot d\mathbf{f} + \frac{d\pi\lambda_T}{c^2} \iint_f \alpha \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$$

und anstelle von Gl. (13.8)

$$(14.18) \quad \bar{B}_m l \leq \frac{4\pi\lambda_T}{c^2} v_{m, \max} \bar{\bar{B}}_m \cdot f + \frac{4\pi\lambda_T}{c^2} \iint_f \alpha \cdot B_t \, d\mathbf{f}.$$

Wenn jetzt auch wieder die Ungleichung (13.9) gilt, so kommt man jetzt wegen des letzten Gliedes rechts auf keinerlei Schwierigkeiten beim Grenzübergang $r \rightarrow 0$, denn B_t muß im singulären Punkt nicht verschwinden.

Mit der Theorie von Krause, Steenbeck und Parker gelang es, Modelle für die magnetischen Vorgänge zu finden, die qualitativ den 22jährigen Magnetfeldzyklus der Sonne als Folge der Wechselwirkung von statistischer Bewegung des Plasmas und der Rotation der Sonne erklären. Den Mechanismus des Sonnendynamos hat man sich dann etwa folgendermaßen vorzustellen: Die Sonne rotiert nicht starr, sondern differentiell, das heißt, die Winkelgeschwindigkeit ist vom Achsenabstand abhängig: $\Omega = \Omega(s)$. Ein zufällig vorhandenes poloidales Feld (etwa in Form einer Störung) bekommt durch diese differentielle Rotation eine toroidale Komponente, da das Feld wegen der hohen Leitfähigkeit von der Materie mitgenommen wird. Dieses toroidale Feld erzeugt nun mit Hilfe des α -Effektes wieder ein poloidales Feld, das das anfängliche poloidale Feld verstärkt. Da dieser Mechanismus sowohl den α -Effekt als auch die differentielle Rotation benötigt, spricht man vom α - Ω -Dynamo. Abb. 14.4 zeigt ein Beispiel der auf diese Weise von Roberts und M. Stix (1972) numerisch berechneten Feldkonfigurationen.

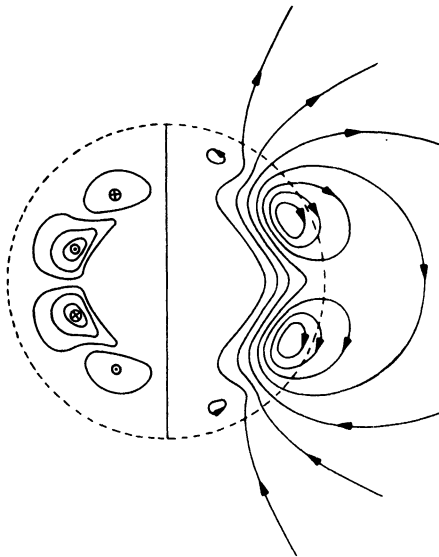


Abb. 14.4 Numerisch berechnete Feldkonfiguration für einen Sonnendynamo nach Roberts und M. Stix (1972). In der linken Hälfte sind die Flussröhren des toroidalen Feldes dargestellt (das Zeichen \odot symbolisiert das aus der Zeichenebene austretende Feld, während das Zeichen \otimes für das in die Zeichenebene eintretende Magnetfeld steht), rechts die Feldlinien des meridionalen Feldanteiles. Die statistische Dynamotheorie gestattet sowohl stationäre als auch zeitlich periodische Lösungen.

Woher kommt nun die Energie, die vom Magnetfeld dissipiert wird? Sie kommt sicherlich nicht aus der Rotationsenergie der Sonne. Die Rotation der Sonne kann sich nämlich dabei nicht verlangsamen, da der Mechanismus keinen Drehimpuls abführt. Die Energie wird vielmehr aus der Bewegung genommen, die das Magnetfeld aufrecht erhält, aus der Turbulenz. Woher hat nun die turbulente Bewegung selbst die Energie? Die Konvektionszone der Sonne dient dazu, Energie aus dem Innern der Sonne nach außen zu transportieren, sie wird getrieben von der im Innern der Sonne erzeugten Energie, die zur Oberfläche drängt. So ist es letztlich die Kernenergie, die im Zentralgebiet der Sonne befreit wird, die über die Turbulenz das Magnetfeld der Sonne aufrecht erhält. Man kann leicht abschätzen, daß nur ein verschwindender Bruchteil der Strahlungsleistung der Sonne nötig ist, um das gesamte magnetische Schauspiel zu bestreiten, das uns die Sonne im 22jährigen Zyklus vorführt.

Kapitel III

MAGNETOHYDRODYNAMIK

Jetzt gehen wir von der Kinematik zur Dynamik über. Die Materie soll sich nicht mehr nach einem künstlich vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld bewegen; $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ soll vielmehr einer Bewegungsgleichung genügen. Dabei müssen wir als Kräfte nicht nur den Gradienten des Druckes und äußere Kräfte wie die Schwerkraft berücksichtigen, sondern auch die elektromagnetischen Kräfte.

§ 15. Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf die Materie

Auf jedes Teilchen der Ladung q wirkt nach § 1 die Kraft

$$(15.1) \quad \mathbf{K} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Die Kraftwirkung auf ein Gas, das aus einzelnen Ladungsträgern besteht, erhält man dann durch Übergang von q auf die Ladungsdichte σ und von $q\mathbf{v}$ auf die Stromdichte \mathbf{j} .

Damit folgt die Kraftdichte auf die Materie

$$(15.2) \quad \mathbf{k} = \sigma\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Die Abschätzung des Gliedes $\sigma\mathbf{E}$ ergibt, daß es im Rahmen unserer Näherung in § 8 gegenüber $\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ vernachlässigbar ist, mit

$$(15.3) \quad |\mathbf{j}| = \frac{c}{4\pi} |\nabla \times \mathbf{B}| \approx \frac{cB}{4\pi L},$$

$$(15.4) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \approx \frac{E}{4\pi L}$$

erhalten wir nämlich

$$(15.5) \quad \frac{\sigma E}{\frac{1}{c}j B} = \frac{E^2}{B^2} = \alpha^2 \ll 1.$$

Also setzen wir für die Kraftdichte

$$(15.6) \quad \mathbf{k} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Die Kraft verschwindet, wenn der Strom \mathbf{j} parallel zum Magnetfeld \mathbf{B} fließt.

a) Der Energiesatz

Wir leiten jetzt aus dem Ohmschen Gesetz den Energiesatz her, der unter anderem die Arbeit gegen die elektromagnetische Kraftdichte (15.6) enthält. Dazu multiplizieren wir das Ohmsche Gesetz (9.4) mit \mathbf{j} und erhalten:

$$(15.7) \quad \frac{1}{\lambda} j^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Mit der Identität

$$(15.8) \quad \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

und der Maxwell-Gleichung

$$(15.9) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}$$

wird daraus

$$(15.10) \quad \frac{1}{\lambda} j^2 + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} B^2 + \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Mit der Definition des Poynting-Vektors

$$(15.11) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

erhalten wir schließlich:

$$(15.12) \quad -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} B^2 = \frac{1}{\lambda} j^2 + \nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

Links steht jetzt der Verlust an magnetischer Feldenergie pro Raum- und Zeiteinheit. Er setzt sich aus den folgenden Gliedern rechts zusammen: aus dem Anteil, der in Form von Joulescher Wärme verheizt wird, dem Teil, der durch den Poyntingvektor weggetragen wird und schließlich aus der Arbeit, die das Feld über die neu eingeführte Kraftdichte an der Materie leistet.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie die Kraftdichte bei einer gegebenen Feldkonfiguration wirkt, diskutieren wir nun zwei einfache Beispiele:

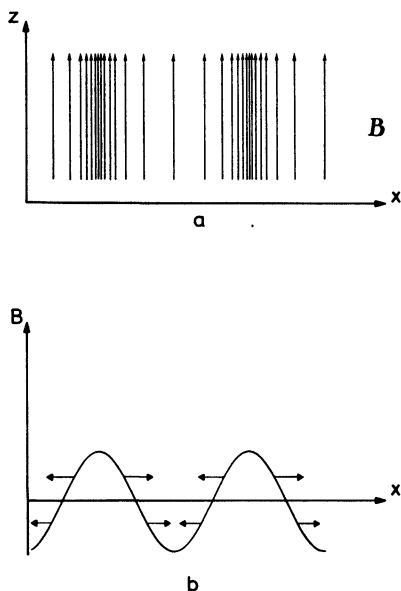


Abb. 15.1 Das in der oberen Bildhälfte gezeichnete inhomogene Parallelfeld, dessen Absolutbetrag unten aufgetragen ist, übt auf die Materie Kräfte in Richtung der unten angezeichneten Pfeile.

b) Der magnetische Druck

Wir nehmen ein paralleles Magnetfeld, das in kartesischen Koordinaten nur eine z -Komponente habe, die jedoch von x abhängen möge (Abb. 15.1 a), also

$$(15.13) \quad \mathbf{B} = (0, 0, B(x)).$$

Für die Kraftdichte gilt dann:

$$(15.14) \quad \mathbf{k} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}.$$

Ferner ist

$$(15.15) \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = (0, -B', 0).$$

Dabei bedeutet der Strich bei B die Ableitung nach x . Mit

$$(15.16) \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (-B B', 0, 0)$$

folgt für die x -Komponente

$$(15.17) \quad k_x = -\frac{1}{4\pi} B B' = -\frac{1}{8\pi} (B^2)'$$

Aus der Inhomogenität des Magnetfeldes resultiert also eine Kraftdichte k_x (Abb. 15.1 b). Hier wirkt die Kraft auf die Materie wie ein Druck. So wie ein isothermes Gas von Stellen hoher Teilchendichte in Gebiete niedriger Dichte drückt, so drücken die Feldlinien von Gebieten hoher Feldstärke in Gebiete niedriger Dichte der Feldlinien. Die Feldlinien scheinen sich abzu stoßen. Man kann also hier von einem *magnetischen* Druck sprechen. Aber anders als beim Gasdruck ist die Kraftwirkung eines Magnetfeldes viel komplizierter; das sehen wir im nächsten Beispiel.

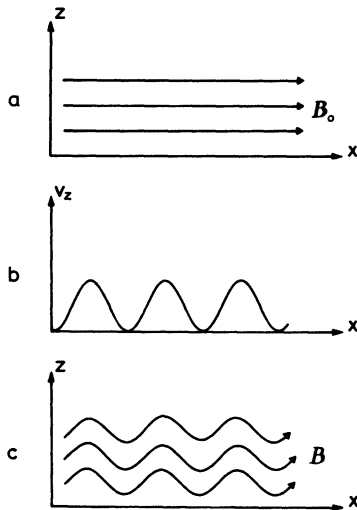


Abb. 15.2 Ein homogenes Magnetfeld (a) wird durch ein Geschwindigkeitsfeld (b) deformiert, so daß es die Form (c) erhält. Die dabei auftretenden Kräfte versuchen, das Magnetfeld in die ursprüngliche Form zurückzubringen.

c) Der magnetische Zug

Jetzt sei zunächst ein homogenes Magnetfeld

$$(15.18) \quad \mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$$

gegeben, für das die Kraftdichte (15.14) verschwindet (Abb. 15.2 a). Dieses Feld werde (bei unendlicher Leitfähigkeit) von einem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (0, 0, v_z(x))$ – etwa von der in Abb. 15.2 b gegebenen Art – verzerrt, so daß nach einiger Zeit die Feldlinien aussehen, wie in Abb. 15.2 c dargestellt ist.

Zur Berechnung des verzerrten Feldes benötigen wir

$$(15.19) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = (0, v_z B_0, 0)$$

und

$$(15.20) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = (0, 0, v_z' B_0).$$

Dann ist das verzerrte Feld nach Gl. (10.13) und wegen $\lambda \rightarrow \infty$:

$$(15.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} dt = \mathbf{B}_0 + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) dt \\ &= \mathbf{B}_0 + (0, 0, v_z' B_0 dt) = (B_0, 0, v_z' B_0 dt). \end{aligned}$$

Welche Kraft üben nun die so verkrümmten Feldlinien aus? Es ist

$$(15.22) \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = (0, -v_z'' B_0 dt, 0),$$

also

$$(15.23) \quad \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (0, 0, v_z'' B_0^2 dt).$$

Damit folgt

$$(15.24) \quad k_z = \frac{1}{4\pi} v_z'' B_0^2 dt.$$

Die magnetische Kraftdichte hat nur eine Komponente in z-Richtung. Sind die Feldlinien an einer Stelle in Abb. 15.2 c nach oben konvex, dann ist $v_z'' < 0$, und die Kraft zieht nach unten, sie ist also so gerichtet, daß sie die Ausbeulungen des verzerrten Feldes wieder gerade zu biegen versucht. Wir können also sagen, daß die magnetischen Feldlinien die Tendenz haben, sich zu verkürzen. Dementsprechend spricht man von einem *magnetischen Zug*.

§ 16. Die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik

Um zu dem Gleichungssystem zu kommen, das die dynamischen Wechselwirkungen zwischen Feld und Materie beschreibt, müssen wir das in § 9 gegebene System erweitern.

a) Das Gleichungssystem

Die erste zusätzliche Gleichung ist die Bewegungsgleichung der Materie, die wir aus der Hydrodynamik übernehmen:

$$(16.1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{k} + \rho \nu \Delta \mathbf{v}.$$

$$(\Delta \mathbf{v} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}))$$

Der Term $\rho \nu \Delta \mathbf{v}$ gibt die Kraftdichte der Reibung wieder. ν ist die hier als konstant angenommene *kinematische Viskosität*. Ihre Dimension ist $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$.

Der Vektor \mathbf{k} enthält alle auf die Materie wirkenden äußeren Kräfte. Hier ist vor allem die im letzten Paragraphen hergeleitete elektromagnetische Kraftdichte wichtig:

$$(16.2) \quad \mathbf{k} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Je nach Anwendung werden wir später auch die Dichte $\rho \mathbf{g}$ der Schwerkraft in \mathbf{k} mitnehmen. Dabei ist \mathbf{g} die Schwerebeschleunigung. Ferner kommt die Kontinuitätsgleichung der Materie hinzu:

$$(16.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Schließlich müssen wir noch eine Aussage über die Zustandsgleichung machen. Genauer gesagt, wir müssen vorschreiben, wie P und ρ zusammenhängen. Dieser Zusammenhang ist nicht einfach anzugeben, da er durch das Verhalten der Temperatur mitbestimmt ist. Haben wir zum Beispiel ein isothermes, ideales Gas, das während seiner Bewegung seine Temperatur beibehält, dann gilt einfach

$$(16.4) \quad P = C \rho.$$

Dabei ist die Konstante C proportional zur Temperatur. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn man ein ursprünglich isothermes Gas hinreichend langsam bewegt, so langsam, daß es Zeit hat, sich auf die Temperatur der Umgebung ein-

zustellen. Bewegt man dagegen das Gas so rasch, daß es keine Zeit hat, Energie abzustrahlen oder abzuleiten, dann gilt im jeweiligen Ruhsystem eines Materielements die *Adiabatenbeziehung*

$$(16.5) \quad P = C \rho^\gamma.$$

Dabei ist γ der *Adiabatenexponent*, der bei einem idealen Gas von f Freiheitsgraden durch

$$(16.6) \quad \gamma = \frac{f+2}{f}$$

bestimmt ist. Für das Folgende schreiben wir die Zustandsgleichung in der allgemeinen Form $P = P(\rho, T)$; wir sind uns aber immer bewußt, daß zu ihrer Festlegung eigentlich noch gleichzeitig ein Problem des Wärmetransports mit zu lösen ist. Wir werden uns meist auf die beiden Grenzfälle der Isothermie und der Adiabatie beschränken. In § 21 werden wir allerdings ein Beispiel behandeln, in dem gerade der thermodynamische Teil des Problems besondere Effekte hervorruft.

Wir fassen nun unser Gleichungssystem zusammen:

$$(16.7) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$(16.8) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(16.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(16.10) \quad \mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right),$$

$$(16.11) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \rho \nu \Delta \mathbf{v},$$

$$(16.12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}),$$

$$(16.13) \quad P = P(\rho, T).$$

Diese sieben Gleichungen sind die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik. Dabei haben wir in der Bewegungsgleichung die Schwerkraft mit berücksichtigt. Wir haben ein System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen vorliegen. Die Temperatur nehmen wir als eine gegebene Funktion an. Im einfachen Fall der Isothermie haben wir $T = \text{const.}$, in anderen Fällen ist T

durch die Wärmeleitungsgleichung gegeben. Wir werden fast immer nur Bewegungen mit kleinen Geschwindigkeiten betrachten, dann kann man das Glied $\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ in der Bewegungsgleichung vernachlässigen. Zur Lösung unseres Gleichungssystems muß man noch Randbedingungen vorgeben – wir werden später darauf zurückkommen.

b) Abschätzungen

Um die Terme der Bewegungsgleichung gegeneinander abschätzen zu können, nehmen wir wieder an, daß L eine für das Problem charakteristische Länge ist, innerhalb der sich etwa Feldstärke oder Geschwindigkeit merklich ändern. Ebenso sei τ eine charakteristische Zeitskala. Dann gilt für die einzelnen Terme:

$$(16.14) \quad \text{Trägheitsterm:} \quad \rho \frac{v}{\tau} = \rho \frac{v^2}{L} \quad (v = \frac{L}{\tau});$$

$$(16.15) \quad \text{Lorentzkraft:} \quad \frac{1}{c} jB \approx \frac{B^2}{4\pi L};$$

$$(16.16) \quad \text{Viskosität:} \quad |\rho \nu \Delta \mathbf{v}| \approx \frac{\rho \nu v}{L^2}.$$

Bei langsamer Bewegung kann man oft den Trägheitsterm vernachlässigen, bei schwachen Magnetfeldern die Lorentzkraft. Für das Verhältnis von Lorentzkraft und Trägheitsterm erhalten wir

$$(16.17) \quad S = \frac{B^2/8\pi}{\rho v^2/2} = \frac{\text{elektromagnetische Energiedichte}}{\text{kinetische Energiedichte}}.$$

Die dimensionslose Zahl S entscheidet bei guter Leitfähigkeit, wer stärker ist, Feld oder Materie. Ist S groß gegenüber 1, dann überwiegt die magnetische die kinetische Energie, das Magnetfeld hält die Bewegung der Materie in Grenzen. Ist dagegen S klein gegenüber 1, so muß das Magnetfeld der Bewegung der Materie folgen.

Wir nehmen als Beispiel die Verhältnisse in der Photosphäre der Sonne, die Dichte ist dort etwa $2 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$. Aus den darunterliegenden Schichten wird die Sonnenenergie durch Konvektionsbewegung nach außen transportiert; heiße Materieballen steigen auf, kühle sinken ab. In der Photosphäre mißt man Konvektionsgeschwindigkeiten von etwa 2 km/sec. In der ungestörten Photosphäre mißt man magnetische Feldstärken von einigen Gauß. Wir erhalten also für $B = 2 \Gamma$:

$$(16.18) \quad \frac{\rho}{2} v^2 = 4 \times 10^3, \quad \frac{B^2}{8\pi} = 1.6 \times 10^{-1}, \quad \text{also } S = 4 \times 10^{-5}.$$

Das Magnetfeld wird also von der konvektiven Bewegung mitgenommen. Anders ist es dagegen, wenn die Magnetfeldstärke tausend Mal größer ist. Mit $B = 2000 \Gamma$ folgt $S = 40$; jetzt halten die Feldlinien die Materie fest.

In Sonnenflecken hat man Feldstärken von mehreren tausend Gauß, und deshalb sollte dort die konvektive Bewegung unterdrückt werden. L. Biermann (1941) hat sogar geschlossen, daß die Magnetfelder die eigentliche Ursache dafür sind, daß die Flecken dunkler sind als die umgebende Photosphäre. Da die konvektive Bewegung vom Feld unterdrückt wird, wird an diesen Stellen der vom Sonneninnern kommende Energiestrom abgestoppt. F. Hoyle (1949) schlug vor, daß der Energiestrom seitlich um den Fleck herum abgelenkt wird (vgl. auch Cowling 1953). Da die Energiebilanz erhalten bleiben muß, müßte dann die unmittelbare Umgebung des Fleckes heller strahlen als die übrige Photosphäre. Das ist jedoch nicht der Fall, genauere neuere Beobachtungen haben gezeigt, daß die Vorgänge in Wirklichkeit komplizierter sind. Das Defizit des Energiestroms im Fleck wird vielmehr durch die (helleren) Fackeln und andere Erscheinungen der Sonnenaktivität ausgeglichen. Die konvektive Bewegung im Fleckeninnern wird auch nicht vollständig unterdrückt, das schließt aber nicht aus, daß der Energiestrom im Fleck trotzdem durch das Magnetfeld stark gedrosselt wird, der Fleck erscheint deshalb dunkler.

Im interstellaren Gas beobachtet man Relativgeschwindigkeiten absorbierender Wolken von 8 km/sec. Die Dichte liegt bei $\rho = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ und das Magnetfeld bei $5 \times 10^{-6} \Gamma$. Dann folgt $S = 3.1$. Magnetische und kinetische Energiedichte sind also von gleicher Größenordnung.

c) *Magnetohydrostatik*

Leider ist das System der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen, das wir im Abschnitt a) kennenlernten, schon so kompliziert, daß es nur wenige analytische Lösungen gibt. Man muß daher meist zu numerischen Lösungsmethoden greifen. Es sieht allerdings schon viel besser aus, wenn man sich auf spezielle Lösungen beschränkt.

In den folgenden Paragraphen werden wir *statische Lösungen* des Systems der magnetohydrodynamischen Gleichungen untersuchen, d.h. Lösungen, für die alle Größen zeitlich konstant sind und für die die Materiegeschwindigkeit \mathbf{v} identisch verschwindet.

Dann vereinfachen sich unsere Grundgleichungen zu

$$(16.19) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$(16.20) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$(16.21) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(16.22) \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

$$(16.23) \quad \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g},$$

$$(16.24) \quad P = P(\rho, T).$$

Von diesem Gleichungssystem brauchen wir nur die drei Gleichungen

$$(16.25) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(16.26) \quad \nabla P = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g},$$

$$(16.27) \quad P = P(\rho, T)$$

zu lösen, da die übrigen Größen \mathbf{j} und \mathbf{E} aus ρ und \mathbf{B} bestimmt werden können. Im Fall der *Magnetohydrostatik* reduziert sich unser kompliziertes Gleichungssystem als auf die Gleichungen (16.25) bis (16.27). Bevor wir magnetohydrostatische Lösungen diskutieren, wollen wir die magnetische Kraftdichte in etwas anderer Form studieren.

d) Der Tensor des Impulsstromes

Wir schreiben jetzt die Bewegungsgleichung (16.11) in tensorieller Schreibweise. Der Einfachheit halber lassen wir das Reibungsglied weg. Wir benutzen ein kartesisches System, dessen Koordinaten x_1, x_2, x_3 sein mögen. Das Magnetfeld sei $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, und es sei $B = |\mathbf{B}|$. Die i -te Komponente der Lorentzkraftdichte läßt sich dann in folgender Form schreiben:

$$(16.28) \quad \begin{aligned} k_i &= \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}))_i \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} B^2) \\ &\quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

δ_{ik} ist das Kronecker-Symbol: $\delta_{ik} = 1$ für $k = i$ und $\delta_{ik} = 0$ für $k \neq i$. Bei der Herleitung von Gl. (16.28) haben wir von der Beziehung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Gebrauch gemacht. Da wegen der Kontinuitätsgleichung (16.12) für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$(16.29) \quad \left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_i = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k)$$

($i = 1, 2, 3$)

gilt, kann man für die Bewegungsgleichung auch schreiben

$$(16.30) \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} B^2) - \rho g_i = 0.$$

Wegen

$$(16.31) \quad \frac{\partial P}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P}{\partial x_k} \delta_{ik}$$

läßt sich mit

$$(16.32) \quad P_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} P + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} B^2 - B_i B_k \right)$$

Gl. (16.30) zusammenfassen zu

$$(16.33) \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i.$$

Der in Gl. (16.32) definierte Tensor beschreibt den Impulstransport. Denken wir uns ein in k -Richtung orientiertes Flächenelement df ; dann geben $P_{1k} df$, $P_{2k} df$, $P_{3k} df$ an, wieviel Impuls pro Zeiteinheit durch dieses Flächenelement transportiert wird. P_{ik} beschreibt dabei den Transport der i -Komponente des Impulses durch das Flächenelement. Der Tensor P_{ik} ist symmetrisch: $P_{ik} = P_{ki}$. Er setzt sich zusammen aus dem bereits aus der Hydrodynamik bekannten Tensor

$$(16.34) \quad A_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} P$$

und dem *Maxwellschen Spannungstensor*

$$(16.35) \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} B^2 - B_i B_k \right).$$

Der erste Term in A_{ik} gibt den Impulstransport aufgrund der durch unser Flächenelement hindurchtretenden Materie, der zweite Term den Impulstransport durch den Gasdruck. (Hätten wir das Reibungsglied in der Bewegungsgleichung mitgenommen, dann träte in A_{ik} auch noch der Reibungstensor auf.) Wir sehen also jetzt, daß die Lorentz-Kraftdichte in der tensoriellen Schreibweise ganz natürlich zu den bereits vorhandenen hydrodynamischen Gliedern paßt.

e) Der Gaußsche Satz für Tensoren

Um mit dem Tensor T_{ik} weiterarbeiten zu können, müssen wir zunächst noch einen mathematischen Satz herleiten. Wir definieren als die *Divergenz* des symmetrischen Tensors T_{ik} den Vektor

$$(16.36) \quad \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k}, \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{2k}}{\partial x_k}, \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{3k}}{\partial x_k} \right).$$

Es gilt nun für Tensoren der Gaußsche Satz

$$(16.37) \quad \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV = \int_O \sum_{k=1}^3 T_{ik} df_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dabei ist V ein Volumen mit der Oberfläche O und dem nach außen weisenden gerichteten Oberflächenelement $df = (df_1, df_2, df_3)$. Der Beweis von Gl. (16.37) läßt sich auf den Gaußschen Satz für Vektoren zurückführen. Wir halten dazu den Index k fest. Dann gilt für jeden Vektor $a = (a_1, a_2, a_3)$ mit $a_i = T_{ik}$ der Gaußsche Satz für Vektoren:

$$(16.38) \quad \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dV = \int_O \sum_{k=1}^3 a_k df_k.$$

Das ist aber gleichwertig mit der i -Komponente von Gl. (16.37). Die verschiedenen Wirkungen der Lorentzkraft werden besonders anschaulich, wenn man unstetige Magnetfelder betrachtet. Wir werden daher im nächsten Paragraphen den Gaußschen Satz für Tensoren benutzen, um elektromagnetische Flächenkräfte zu berechnen.

§ 17. Unstetigkeitsflächen und Flächenkräfte

Ein Magnetfeld sei an einer Fläche unstetig; dort sollen sich Richtung und Betrag des Feldes ändern. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ geht die Normalkomponente des Feldes stetig durch die Trennfläche; die Tangentialkomponente wird im allgemeinen springen, die Feldlinien werden also einen Knick an dieser Fläche haben. Es ist dann anschaulich klar, daß auf die Unstetigkeitsfläche eine Kraft ausgeübt wird, denn die Feldlinien haben das Bestreben, ihre Krümmung möglichst klein zu halten, den Knick also zum Verschwinden zu bringen. Zur Berechnung dieser Kraftwirkung leistet der im letzten Paragraphen benutzte Tensorkalkül gute Dienste.

a) Die Flächenkraft

Wir betrachten einen Punkt der Trennfläche und den Normalenvektor \mathbf{n} an dieser Stelle. In der Nachbarschaft des Punktes können wir die Trennfläche durch ihre Tangentialebene approximieren. Sie teilt den Raum in zwei Halbräume. Den Halbraum, in den \mathbf{n} weist, nennen wir Halbraum ①, den anderen Halbraum ②.

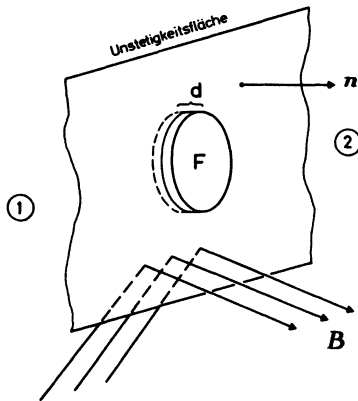


Abb. 17.1 Das Magnetfeld sei an einer Fläche unstetig, diese Fläche teilt den Raum in zwei Halbräume ①, ②. Die Flächennormale \mathbf{n} weise in Halbraum ②. Zur Herleitung von Gl. (17.4) wird über ein flaches Volumen (Dose) der Grundfläche F und der Höhe d integriert.

Wir legen nun eine kleine, flache, zylindrische „Dose“ vom Volumen V und der Oberfläche O über die Trennfläche (Abb. 17.1) Die Grundfläche der Dose sei F ; ihre Dicke d . Ihre Ausdehnung in der zur Trennfläche senkrechten Richtung werden wir später nach Null gehen lassen. Die Kompo-

nennten des Tensors T_{ik} auf den beiden Grundflächen bezeichnen wir mit $T_{ik}^{(1)}$ und $T_{ik}^{(2)}$. Wir berechnen dann das Volumenintegral über die Kraftdichte \mathbf{k} und formen es mit Hilfe des Gaußschen Satzes (16.37) in ein Oberflächenintegral um. Wir erhalten dann wegen Gl. (16.26) mit $d\mathbf{F} = (dF_1, dF_2, dF_3)$ als dem nach außen gerichteten Flächenelement der Oberfläche O

$$(17.1) \quad \int_V \mathbf{k}_i dV = - \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV = - \int_O \sum_{k=1}^3 T_{ik} dF_k.$$

Das Oberflächenintegral ist über den Rand der Dose und in den beiden Halbräumen jeweils über die Grundfläche F zu erstrecken. Dabei ist zu beachten, daß der Vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ im Halbraum \textcircled{D} dem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{F}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Wir erhalten dann

$$(17.2) \quad - \int_O \sum_{k=1}^3 T_{ik} dF_k = - \sum_{k=1}^3 (T_{ik}^{(2)} - T_{ik}^{(1)}) n_k F + O(d).$$

Dabei bedeutet $O(d)$ den über den Rand integrierten Anteil, der von der Größenordnung d ist. Das Zeichen $O(x)$ soll im Folgenden ganz allgemein als Symbol für Glieder der Größenordnung x stehen; das heißt, wenn $f(x) = O(x)$, dann bleibt $f(x)/x$ beschränkt für $x \rightarrow 0$. Wir verwenden dieses Symbol, wenn die genaue Form eines derartigen Gliedes nicht näher interessiert.

Wir lassen nun d infinitesimal klein werden und definieren die *Flächenkraftdichte* \mathbf{k}^* durch

$$(17.3) \quad \mathbf{k}^* = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\int_V \mathbf{k} dV}{F}.$$

Dann erhalten wir nach dem Grenzübergang $d \rightarrow 0$ in Gl. (17.1) und (17.2)

$$(17.4) \quad k_i^* = - \sum_{k=1}^3 \llbracket T_{ik} \rrbracket n_k.$$

Dabei haben wir die Abkürzung $\llbracket A \rrbracket = A^{(2)} - A^{(1)}$ für den „Sprung“ einer Größe A eingeführt.

Wir wollen jetzt den allgemeinen Ausdruck (17.4) für die Kraft an einer Unstetigkeitsfläche auf den speziellen Fall übertragen, wo diese Fläche in der y - z -Ebene liegt und \mathbf{n} gleich dem Einheitsvektor in x -Richtung ist. Die drei Komponenten des Vektors

$$(17.5) \quad -4\pi \sum_{k=1}^3 T_{ik} n_k$$

sind dann

$$(17.6) \quad \frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2), B_x B_y, B_x B_z.$$

Nun ist $\llbracket B_x \rrbracket = 0$, denn die Normalkomponente \mathbf{B} geht stetig durch die Unstetigkeitsfläche. Man erhält also

$$(17.7) \quad 4\pi \mathbf{k}^* = \left(-\frac{1}{2} \llbracket B_y^2 + B_z^2 \rrbracket, \llbracket B_y \rrbracket B_x, \llbracket B_z \rrbracket B_x\right).$$

b) Der Flächenstrom

In der Unstetigkeitsfläche fließt ein Flächenstrom. Durch einen beliebigen Punkt der Trennfläche legen wir eine Ebene, welche den Normalenvektor enthält. In ihr betrachten wir eine kleine, geschlossene Kurve (Abb. 17.2), welche die Rechtecksfläche f umschließt. Die beiden Rechteckseiten seien a und d . Später werden wir d infinitesimal klein werden lassen. Ist $d\mathbf{l}$ das gerichtete Linienelement auf der Randkurve und $d\mathbf{f}$ das gerichtete Flächenelement der umschlossenen Fläche, dann folgt mit dem Stokesschen Satz

$$(17.8) \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_f (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \int_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}.$$

Dabei ist \mathbf{f} der Vektor

$$(17.9) \quad \mathbf{f} = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) d,$$

und \mathbf{a} ist ein Vektor vom Betrage a , der im Halbraum $\textcircled{2}$ die Richtung von $d\mathbf{l}$ hat (vgl. Abb. 17.2).

Andererseits erhalten wir für das Kurvenintegral

$$(17.10) \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \llbracket \mathbf{B} \rrbracket \cdot \mathbf{a} + O(d).$$

Durch Zusammenfassen von Gl. (17.8), (17.9) und (17.10) ergibt sich dann

$$(17.11) \quad \frac{4\pi}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{j} d = \llbracket \mathbf{B} \rrbracket \cdot \mathbf{a} + O(d).$$

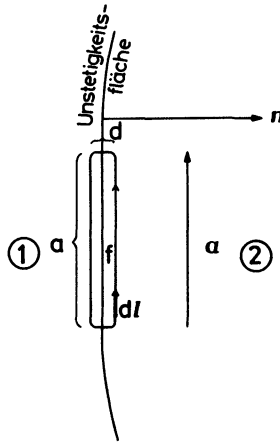


Abb. 17.2 Der Integrationsweg zur Herleitung von Gl. (17.14) umschließt die Fläche f .

Definieren wir nun die *Flächenstromdichte* j^* durch

$$(17.12) \quad j^* = \lim_{d \rightarrow 0} (j d),$$

so folgt beim Grenzübergang $d \rightarrow 0$

$$(17.13) \quad \frac{4\pi}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{j}^* = \llbracket \mathbf{B} \rrbracket \cdot \mathbf{a}.$$

Löst man diese Gleichung nach den Komponenten von \mathbf{j}^* auf, so erhält man

$$(17.14) \quad \mathbf{j}^* = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{B} \rrbracket,$$

wovon man sich direkt durch Einsetzen des Ausdruckes (17.14) in Gl. (17.13) und Ausführen des mehrfachen Vektorproduktes überzeugen kann.

c) Der magnetische Druck

Als erstes Beispiel sei ein unstetiges Magnetfeld der Form

$$(17.15) \quad \begin{aligned} B_x &\equiv 0, & B_z &\equiv 0 \\ B_y &= B & \text{für } x > 0, \\ B_y &= 0 & \text{für } x < 0 \end{aligned}$$

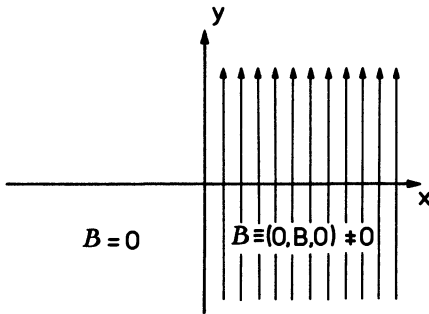


Abb. 17.3 Homogenes Magnetfeld rechts und feldfreier Raum links werden durch eine Unstetigkeitsfläche voneinander getrennt. Das Magnetfeld übt auf sie einen Druck aus.

gegeben (vgl. Abb. 17.3). Nach Gl. (17.7) folgt, daß die Flächenkraft nur eine x -Komponente hat

$$(17.16) \quad k_x^* = -\frac{1}{8\pi} \llbracket B_y^2 \rrbracket = -\frac{1}{8\pi} (B_y^2)_{x \rightarrow +0} = -\frac{1}{8\pi} B^2.$$

Diese Flächenkraft senkrecht zur Unstetigkeitsfläche ist der *magnetische Druck*:

$$(17.17) \quad P_M = \frac{1}{8\pi} B^2.$$

Anschaulich ist dieser Druck eine Folge des Bestrebens der Feldlinien, ihren gegenseitigen Abstand zu vergrößern. Wenn an der Unstetigkeitsfläche Gleichgewicht herrschen soll, dann muß ein Gegendruck herrschen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn ein Gas den Halbraum ausfüllt, das den Gasdruck $P_G = P_M$ besitzt. Auf diese Weise können homogenes Magnetfeld und Gas nebeneinander im Gleichgewicht stehen.

d) Vom Magnetfeld eingeschlossene Materie

Kann man ein Plasma durch ein Magnetfeld in einem endlichen Volumen eingeschlossen halten? Da sich das Plasma in Magnetfeldrichtung stets frei bewegen kann, dürfen keine Feldlinien in das betrachtete Volumen eindringen. Das Magnetfeld B_a im Außenraum muß also parallel zur Oberfläche F des betrachteten Volumens laufen (Abb. 17.4).

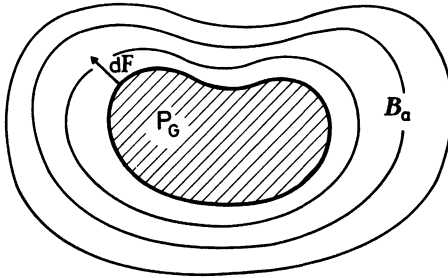


Abb. 17.4 Ein von einem Magnetfeld eingeschlossenes Plasma. Im schraffierten Innengebiet wirkt nur der Gasdruck, im umgebenden Vakuum nur der magnetische Druck.

An der Grenzfläche muß der Gasdruck P_G im Innern gleich dem magnetischen Außendruck sein:

$$(17.18) \quad P_G = \frac{1}{8\pi} (B_a^2)_F,$$

wobei $(B_a^2)_F$ der Grenzwert von B_a^2 ist, den man erhält, wenn man sich von außen her der Oberfläche F nähert.

Da im Innern keine Kräfte wirken, muß dort P_G konstant sein. Dann ist aber P_G auf der ganzen Oberfläche konstant, also muß beim Gleichgewicht auch $(B_a^2)_F = \text{konstant}$ sein. Dann folgt aus Gl. (17.14) für den Oberflächenstrom j^* , daß auch er konstant sein muß. Eine notwendige Bedingung dafür, daß ein endliches Gasvolumen sich im Gleichgewicht mit einem Magnetfeld befindet, ist also, daß man auf die Oberfläche ein System von Stromlinien legen kann, so daß $j^* = \text{const.}$ gilt.

Nicht auf jeder Fläche kann man einen konstanten Flächenstrom fließen lassen. Dies ist nur möglich, wenn sie singularitätenfrei mit einer Schar äquidistanter Linien überziehbar ist. Da der Abstand der Stromlinien mit der Stromstärke zusammenhängt, müssen bei konstantem Flächenstrom die Stromlinien äquidistant sein. Daher kann man ein Plasma nicht in einer Kugel oder einer der Kugel topologisch äquivalenten Fläche einschließen. Die Breitenkreise auf der Erdkugel beispielsweise sind zwar äquidistant, sie werden aber an den Polen singularär. Nicht-endliche Flächen mit diesen Eigenschaften lassen sich leicht angeben, z.B. Zylinder und Ebene. Für endliche Flächen müssen die Stromlinien geschlossene Kurven sein, sonst können sie nicht äquidistant bleiben. Eine endliche Fläche, die mit so einer Schar äquidistanter, geschlossener Linien überziehbar ist, ist der *Torus* (vgl. Abb. 17.5 a). Allerdings müssen diese

Stromlinien *azimutale* Topologie haben, das heißt, sie müssen so auf der Oberfläche des Torus verlaufen, daß sie seine Achse umschließen. Abb. 17.5 b zeigt so einen Torus in Äquatorprojektion.

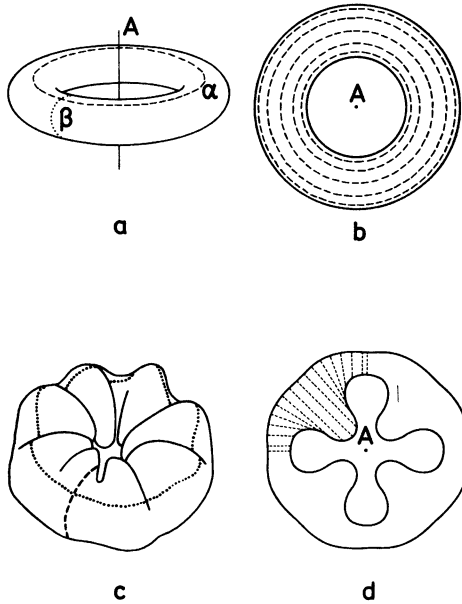


Abb. 17.5 (a) Geschlossene Linien auf der Oberfläche eines Torus. α ist eine Linie azimuthaler Topologie (umschließt die Symmetrieachse), β eine Linie meridionaler Topologie (umschließt den Toruskörper, aber nicht seine Achse).

(b) Will man ein Plasma so einschließen, daß der Gasdruck im Innern sich mit dem Druck eines äußeren Magnetfeldes die Waage hält, dann muß man die trennende Oberfläche mit äquidistanten Stromlinien überziehen. Das ist möglich bei einem Torus (von nicht notwendigerweise kreisförmigem Querschnitt), wenn die (gestrichelten) Stromlinien azimuthal verlaufen, wie hier in der Äquatorprojektion angedeutet.

(c) Sollen die äquidistanten Stromlinien meridionale Topologie haben, so muß man den Torus wie in (c) und (d) angedeutet verformen. In (d) ist die Äquatorprojektion einer solchen Fläche mit 4 inneren Wülsten gezeichnet. Die Projektionen der Stromlinien sind gestrichelt. In (c) ist eine Fläche mit 8 inneren Wülsten in Schrägsicht gezeichnet. Gestrichelt ist eine Stromlinie, punktiert eine Linie des äußeren Magnetfeldes angedeutet (nach Meyer, Schmidt 1958).

Man kann auch torusähnliche Flächen angeben, bei denen die geschlossenen Stromlinien *meridionale* Topologie haben, das heißt, sie umschließen zwar den Toruskörper, aber *nicht* seine Achse (vgl. Abb. 17.5 a). Derartige Flächen ha-

ben mit dem Torus nur noch seine Topologie gemeinsam, denn man muß die Innenfläche des Torus so in „Falten“ legen, daß der innere Äquatorumfang der Fläche gleich ihrem äußeren Äquatorumfang wird. Dann sind auch äquidistante Stromlinien von meridionaler Topologie möglich. Abb. 17.5 d und c zeigen die Äquatorprojektion bzw. die perspektivische Ansicht einer solchen Fläche (nach Meyer, Schmidt 1958).

Die Aufgabe, ein heißes Plasma in einem Magnetfeld so einzuschließen, daß es nirgends mit kühlenden Gefäßwänden in Berührung kommt, ist für den Fusionsreaktor wichtig. Deshalb haben in der Frühzeit der Versuche zur Fusion torusartige Gleichgewichtskonfigurationen von der hier beschriebenen Art eine Rolle gespielt. Heute weiß man, daß diese einfachen torusartigen Konfigurationen nicht stabil sind.

e) Die magnetische Zugwirkung

Nun sei ein unstetiges Magnetfeld gegeben, das an der Unstetigkeitsstelle einen Knick aufweist (Abb. 17.6). Es sei

$$(17.19) \quad B_x \text{ stetig, } B_y^{(1)} = -B_y^{(2)}, \quad B_z = 0.$$

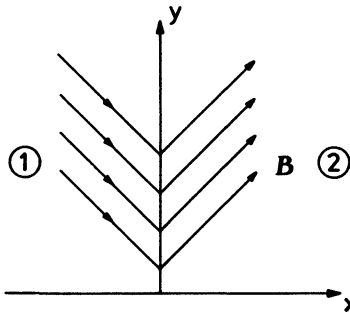


Abb. 17.6 Magnetfeld mit in der Ebene $x = 0$ unstetiger Tangentialkomponente.

Wir berechnen wieder nach Gl. (17.7) die Flächenkraftdichte:

$$(17.20) \quad \begin{aligned} k_x^* &= 0, & k_z^* &= 0, \\ k_y^* &= \frac{1}{4\pi} \llbracket B_y \rrbracket B_x > 0. \end{aligned}$$

Das Feld versucht also, die Unstetigkeitsfläche nach oben zu ziehen. Wir können uns bei einem Feld der in Abb. 17.6 dargestellten Form einen Gleichgewichtszustand etwa folgendermaßen vorstellen:

Ein Gravitationsfeld wirke in die y -Richtung. Eine Materieschicht liege in der y - z -Ebene. Ein homogenes Magnetfeld sei parallel zur x -Richtung. Die Materieschicht sinkt dann unter dem Einfluß der Schwerkraft nach unten. Die magnetischen Feldlinien erhalten dabei einen Knick in der y - z -Ebene, es entsteht eine magnetische Flächenkraft, die das Bestreben hat, die Materieschicht am Fallen zu hindern. Im Gleichgewicht halten sich Schwerkraft und k^* die Waage, die Materie „hängt“ in den Feldlinien. Dazu definieren wir eine *Flächendichte* ρ^* der Materie dadurch, daß wir die „Dose“ von Abb. 17.1 in die Unstetigkeitsfläche legen und ihre Dicke d nach Null gehen lassen und dabei die in der Dose enthaltene Materiemenge zusammenquetschen. Dann wird die Flächendichte

$$(17.21) \quad \rho^* = \lim_{d \rightarrow 0} \int \frac{\rho dV}{F}.$$

Die Flächenkraftdichte der Gravitation wird dann $\rho^* g$, und wir erhalten für das Gleichgewicht zwischen Gravitations- und Lorentzkraft

$$(17.22) \quad \rho^* g = \frac{1}{4\pi} \llbracket B_y \rrbracket B_x.$$

Damit haben wir – wie in c) – wieder eine einfache magnetohydrostatische Gleichgewichtskonfiguration erhalten. Während dort der magnetische Druck durch den Gasdruck im Gleichgewicht gehalten wurde, haben wir hier Gleichgewicht mit der Schwerkraft. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß die hier zuletzt behandelte Konfiguration in der Sonnenphysik von Bedeutung ist.

§ 18. Sonnenfilamente im magnetohydrostatischen Gleichgewicht

Der in § 17 e) behandelte Fall dient in der Astrophysik zur Deutung der *solaren Filamente*. Die Filamente der Sonne sind Ansammlungen von (relativ) kühler Materie oberhalb der Sonnenoberfläche. Gegen die heißere Sonnenscheibe erscheinen sie dunkler. Sie haben nicht beliebige Formen, sondern stehen meist wie Blätter oder Kämmen senkrecht auf der Sonnenoberfläche. Die kühle Materie der Filamente ist schwerer als die Umgebung, sie müßte daher auf die Sonne zurückfallen. Die Frage ist also, was die Materie im Gleichgewicht hält. Da die Filamente immer an den Trennungslinien der großräumigen Magnetfeldgebiete („field patches“, die Feldstärke ist dort 1–2 Gauß) verschiedener Polarität zu finden sind, liegt es nahe anzunehmen, daß sie durch

Magnetfelder im Gleichgewicht gehalten werden. Das müßten dann Feldkonfigurationen sein, die einen Knick an der Stelle des Filamentes haben. Eine grobe Vorstellung vermittelt Abb. 18.1.

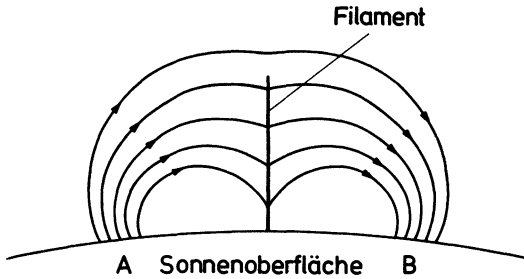


Abb. 18.1 Eine Anhäufung von Materie in einer Fläche (Filament) wird durch die Schwerkraft auf die Sonnenoberfläche gezogen, die entgegengerichtete Zugwirkung des unstetigen Magnetfeldes hält die Materie im Gleichgewicht.

In § 17 e) haben wir mit der Näherung eines unstetigen Feldes das magnetohydrostatische Gleichgewicht beschrieben. Jetzt befassen wir uns mit der *inneren* Struktur des Filaments. Wir wollen also die Unstetigkeitsfläche, die wir bisher benutzt hatten, auflösen und untersuchen, wie sich das Magnetfeld im Filament stetig ändert. Wir schließen uns dabei an die Arbeit von Kippenhahn und Schlüter (1957) an.

Wir wollen ein unendlich langes Filament beschreiben, das senkrecht auf der als eben angenommenen Sonnenoberfläche steht. Wir legen dazu ein kartesisches Koordinatensystem so, daß die Sonnenoberfläche mit der x - y -Ebene zusammenfällt und das Filament in der y - z -Ebene liegt (Abb. 18.2).

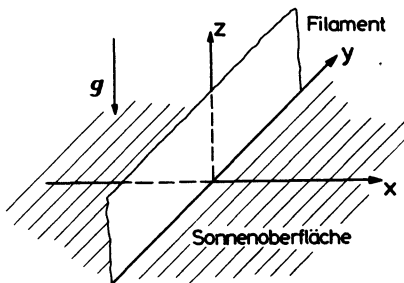


Abb. 18.2 Zur Geometrie eines in der y - z -Ebene liegenden Filaments (schematisch).

a) Hydrostatisches Gleichgewicht im Schwerfeld

Da wir uns nur mit der zweidimensionalen Struktur des Filamentes parallel zur x - z -Ebene befassen wollen, setzen wir voraus, daß alle Größen unabhängig von y sind ($\partial/\partial y = 0$). Die Komponenten für Magnetfeld und Schwerebeschleunigung seien

$$(18.1) \quad \mathbf{B} = (B_x, 0, B_z), \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g).$$

Wenn wir für die Zustandsgleichung die Gleichung des idealen Gases nehmen, haben wir folgendes System zu lösen:

$$(18.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(18.3) \quad \nabla P = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g},$$

$$(18.4) \quad P = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T.$$

Dabei ist \mathfrak{R} die Gaskonstante und μ das mittlere Molekulargewicht. Die Temperatur T sei räumlich konstant.

Es ist nun

$$(18.5) \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) (B_z, 0, -B_x).$$

Setzen wir Gl. (18.4) in Gl. (18.3) ein, so erhalten wir für die Komponenten

$$(18.6) \quad \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} B_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right),$$

$$(18.7) \quad \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - \rho g.$$

Leiten wir Gl. (18.6) partiell nach z , Gl. (18.7) partiell nach x ab und subtrahieren Gl. (18.7) von Gl. (18.6), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\
 (18.8) \quad &+ \frac{1}{4\pi} B_z \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} \right) + \frac{1}{4\pi} B_x \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right) \\
 &+ \frac{\partial \rho}{\partial x} g.
 \end{aligned}$$

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und den daraus folgenden Beziehungen im zweidimensionalen Fall

$$(18.9) \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}$$

folgt:

$$(18.10) \quad B_z \Delta B_x - B_x \Delta B_z + 4\pi g \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Wir führen nun die Abkürzung

$$(18.11) \quad H_P = \frac{\Re T}{g \mu}$$

ein; H_P heißt die *homogene Schichtdicke*, sie ist die Skalenhöhe in der barometrischen Höhenformel $P \sim \exp(-z/H_P)$ und hat die Dimension einer Länge. Wir erhalten dann, wenn wir $\partial \rho / \partial x$ nach Gl. (18.6) einsetzen:

$$(18.12) \quad B_z \Delta B_x - B_x \Delta B_z + \frac{1}{H_P} B_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = 0.$$

b) Vereinfachte Geometrie

Wir wollen unser Problem noch etwas vereinfachen: Wir interessieren uns jetzt vor allem für die Feinstruktur beim Durchgang in x -Richtung durch das Filament, und nicht so sehr für die Strukturänderung in z -Richtung. In einem Bereich, der klein gegenüber der Höhe des Filamentes ist, gelte also, daß die Struktur nicht von z abhängt ($\partial / \partial z = 0$). Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ gilt dann $B_x = \text{const.}$, während $B_z = B_z(x)$ nur noch eine Funktion von x ist. Bezeichnen wir die Ableitung nach x mit einem Strich, so geht die Gleichung (18.12) über in

$$(18.13) \quad -B_x B_z'' + \frac{1}{H_P} B_z (-B_z') = 0.$$

Daraus folgt mit

$$(18.14) \quad \frac{1}{\alpha} = H_P \cdot B_x = \text{const.}$$

$$(18.15) \quad B_z'' + \alpha B_z B_z' = 0.$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$(18.16) \quad B_z' + \frac{\alpha}{2} B_z^2 = \text{const.}$$

Wir geben als Randbedingung vor, daß B_z für $x \rightarrow \infty$ gegen den konstanten Wert B_z^∞ gehen möge. Dann ergibt sich schließlich mit

$$(18.17) \quad \xi = \frac{B_z^\infty}{2H_P B_x} x = \frac{1}{2} \alpha \cdot B_z^\infty \cdot x$$

die Lösung

$$(18.18) \quad B_z = B_z^\infty \cdot \tanh \xi ,$$

wovon man sich durch Einsetzen in Gl. (18.16) überzeugen kann. Die Feldlinien haben dann die in Abb. 18.3 gezeigte Form.

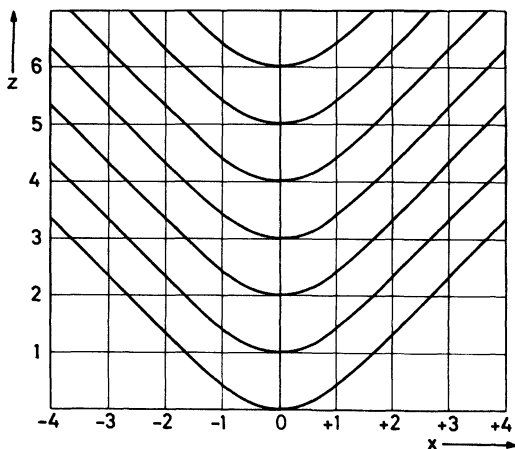


Abb. 18.3 Verlauf der Feldlinien im Innern des Filaments.

So sehen die Feldlinien aus, die die Materie im Gleichgewicht halten. Wir haben den Knick in den Feldlinien gewissermaßen mit einem Mikroskop betrachtet.

Aus Gl. (18.6) und Gl. (18.18) berechnen wir die *Dichteverteilung* im Innern des Filamentes:

$$(18.19) \quad \frac{1}{\mu} \Re T \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_z^2}{\partial x}.$$

Mit der Randbedingung $\rho \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ erhalten wir als Lösung

$$(18.20) \quad \frac{1}{\mu} 4\pi \Re T \rho = -\frac{1}{2} (B_z^2 - (B_z^\infty)^2)$$

oder mit Gl. (18.18)

$$(18.21) \quad \rho = -\frac{1}{8\pi} \frac{\mu}{\Re T} (B_z^\infty)^2 (\tanh^2 \xi - 1) = \frac{1}{8\pi} \frac{\mu}{\Re T} \left(\frac{B_z^\infty}{\cosh \xi} \right)^2.$$

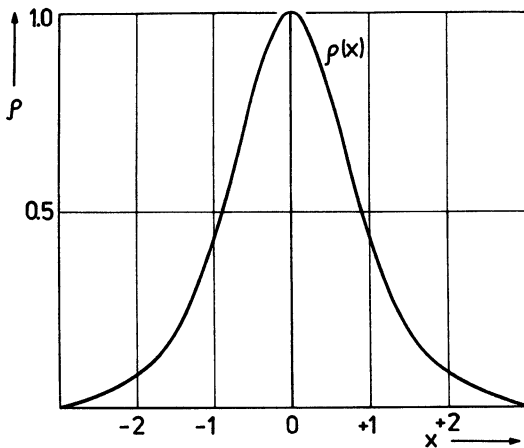


Abb. 18.4 Verlauf der Dichte im Innern des Filaments.

Abb. 18.4 zeigt das entsprechende Dichteprofil im Innern des Filamentes, wenn ρ_c die Zentraldichte bei $x = 0$ ist. Setzt man $B_z^\infty = 1$ Gauß, $\mu = 1$ (neutraler Wasserstoff) sowie $T = 3\,700^\circ\text{K}$ an, so ergibt sich mit $\Re = 8.32 \cdot 10^7$ eine Zentraldichte im Filament von

$$(18.22) \quad \rho_c = 1.3 \times 10^{-13} \text{ g cm}^{-3} \approx 8 \times 10^{10} \text{ H-Atome pro cm}^3.$$

Das ist auch in etwa der Wert, den man aus spektroskopischen Beobachtungen ableitet.

Wir nehmen als Dicke des Filamentes $d \approx 4 H_p$ an. Da die Gravitationsbeschleunigung auf der Sonnenoberfläche $g = 2.74 \cdot 10^4 \text{ cm sec}^{-2}$ beträgt, ergibt sich mit unseren Daten $d \approx 500 \text{ km}$. Aus visuellen Beobachtungen folgt $d < 5000 \text{ km}$.

Wir haben mit unserer obigen analytischen Lösung der magnetohydrostatischen Grundgleichungen also eine Lösung, die die Verhältnisse bei den solaren Filamenten schon in recht guter Näherung beschreibt.

Daß Feldkonfigurationen der oben behandelten Art für die Filamente auf der Sonne verantwortlich sind, dafür spricht, daß die Filamente immer an den neutralen Linien zwischen Flächen verschiedener Polarität zu finden sind – wir erwähnten das bereits. Dagegen scheint zu sprechen, daß man Bewegungen längs des Filaments beobachtet. Da die Feldlinien unseres Modells keine Komponente in die y -Richtung haben, ist es schwer zu verstehen, wie sich Materie quer zu den Feldlinien bewegen kann. Es ist aber nicht sicher, ob die beobachtete Bewegung heller Knoten längs des Filaments wirklich mit materieller Bewegung verknüpft ist. Wahrscheinlich stellen darüber hinaus die oben beschriebenen Feldkonfigurationen nur grobe Annäherungen an die *mittleren* Felder dar, während das wahre Feld eine viel kompliziertere Feinstruktur besitzt.

§ 19. Kraftfreie Magnetfelder

Wenn sich ein Plasma in stationärem Gleichgewicht befindet, so wird die elektromagnetische Kraft $\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ in der hydrostatischen Gleichung durch Druckkraft und durch äußere Kräfte kompensiert. Bei magnetohydrostatischem Gleichgewicht in einem Schwerfeld hat man mit Gl. (16.26):

$$(19.1) \quad \nabla P + \rho \nabla \psi_s = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}.$$

Dabei ist ψ_s das Gravitationspotential ($g = -\nabla \psi_s$). Wenn aber nun ein starkes Magnetfeld in einem stark verdünnten Plasma wirkt, dann sind sowohl der Druck als auch der Druckgradient klein. Das Gewicht $\rho |\nabla \psi_s|$ eines Kubikzentimeters Plasmamaterie ist auch klein, das Magnetfeld muß also ange-
nähert der Gleichung

$$(19.2) \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0$$

genügen. Da solch ein Feld keine Kraft auf die Materie ausübt, nennt man es *kraftfrei*. Eigentlich ist das Ganze nichts Neues: Denken wir uns etwa das Feld

eines Hufeisenmagneten im Vakuum. Dort ist keine Materie und damit nichts, was der magnetischen Kraft das Gleichgewicht halten kann. In der Tat ist das Vakuumfeld eine Lösung der Gleichung (19.2), eine recht triviale allerdings, denn im Vakuum fließen keine Ströme, und die Gl. (19.2) wird mit $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ erfüllt, das Magnetfeld ist ein Potentialfeld. Jedes Potentialfeld ist kraftfrei. Anders aber in einem verdünnten Plasma; dort können trotz der niedrigen Materiedichte starke Ströme existieren, aber gemäß Gl. (19.2) müssen sie *längs* der Feldlinien fließen.

Hat man zum Beispiel ein starkes Magnetfeld, dessen Feldlinien aus einem magnetischen Stern austreten und in die dünne Sternatmosphäre dringen, so muß das Außenfeld in der Atmosphäre kein Potentialfeld sein. In der gut leitenden Materie dort können Ströme fließen, das Feld ist ein kraftfreies Feld.

Da die oberen Schichten der Erdatmosphäre ein leitendes Plasma sind, können auch hier Ströme fließen, und das Feld muß nicht notwendigerweise ein Potentialfeld sein. Wohl aber muß es kraftfrei sein, da Druck und Gewicht des Gases keine Rolle spielen.

Die Gleichung (19.2) ist der folgenden Bedingung äquivalent

$$(19.3) \quad \nabla \times \mathbf{B} = f \mathbf{B} .$$

Dabei ist f eine beliebige, skalare Funktion des Ortes. Zusammen mit der Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ hat man also ein System partieller linearer Differentialgleichungen. Da bei jeder Lösung die Stromlinien mit den Feldlinien zusammenfallen und da sich die Feldlinien um die Stromlinien winden müssen, winden sich bei kraftfreien Magnetfeldern die Feldlinien um sich selbst herum, das Feld hat eine helikale Struktur. Wir geben im folgenden eine Lösung der Gl. (19.3) für den Fall einer besonders einfachen Symmetrie.

a) Einfache Lösungen

Wir nehmen an, das Feld sei sowohl zylinder- wie auch axialsymmetrisch. (Ein Feld ist zylindersymmetrisch, wenn es invariant gegenüber Verschiebung längs einer Achse (z) ist.) Dann hängen alle Größen nur vom Achsenabstand s ab. In einem System s, φ, z von Zylinderkoordinaten hat \mathbf{B} die Komponenten

$$(19.4) \quad B_s(s), B_\varphi(s), B_z(s).$$

Aus

$$(19.5) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s B_s) = 0$$

folgt dann

$$(19.6) \quad B_s = \frac{\text{const}}{s}$$

und wenn wir Regularität auf der Achse fordern: $B_s = 0$. Damit hat \mathbf{B} die Form

$$(19.7) \quad \mathbf{B} = (0, B_\varphi(s), B_z(s)).$$

Die Feldlinien liegen also auf Zylindern, sie sind Wendeln konstanter Steigung auf jedem Zylinder, die Steigung B_z/B_φ kann aber von einem Zylinder zum anderen variieren. Nun hat man

$$(19.8) \quad \nabla \times \mathbf{B} = (0, -\frac{\partial B_z}{\partial s}, \frac{1}{s} \frac{\partial s B_\varphi}{\partial s}),$$

$$(19.9) \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -(B_z \frac{\partial B_z}{\partial s} + \frac{B_\varphi}{s} \frac{\partial s B_\varphi}{\partial s}, 0, 0) = 0,$$

also

$$(19.10) \quad B_z \frac{\partial B_z}{\partial s} + \frac{B_\varphi^2}{s} + B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial s} = 0.$$

Wir definieren nun die der magnetischen Energiedichte proportionale Funktion

$$(19.11) \quad G(s) = B_z^2 + B_\varphi^2.$$

Dann wird

$$(19.12) \quad \frac{dG}{ds} = 2 B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial s} + 2 B_z \frac{\partial B_z}{\partial s} = -2 \frac{B_\varphi^2}{s}.$$

Dabei haben wir rechts Gl. (19.10) benutzt. Dann folgt aber aus Gl. (19.11)

$$(19.13) \quad B_z^2 = G + \frac{s}{2} \frac{dG}{ds}.$$

Somit lassen sich B_φ^2 und B_z^2 durch G ausdrücken:

$$(19.14) \quad B_\varphi^2 = -\frac{s}{2} \frac{dG}{ds}, \quad B_z^2 = \frac{1}{2s} \frac{d(s^2 G)}{ds}.$$

Damit man reelle Ausdrücke für B_φ, B_z erhält, muß G die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(19.15) \quad \frac{dG}{ds} < 0, \quad \frac{d(s^2 G)}{ds} > 0.$$

Die magnetische Energiedichte muß also nach außen abnehmen, aber nicht stärker als $1/s^2$. Jede Funktion $G(s)$, welche diese Bedingungen erfüllt, liefert eine Lösung des Problems.

b) Ergodische Felder

Auch im Innern eines Sterns können kraftfreie Felder von Bedeutung sein. Wenn turbulente Bewegung im Sterninnern ein anfangs vielleicht gleichförmiges Magnetfeld zerzaust und in ein statistisches Magnetfeld verwandelt, dann kann man annehmen, daß bei hinreichend verknäultem Magnetfeld eine Feldlinie jeder anderen beliebig nahekommt. In Anlehnung an die statistische Mechanik nennt man das Feld dann *ergodisch*.

Wir nehmen an, wir hätten eine Zustandsgleichung der Form $\rho = \rho(P)$. Das gilt zum Beispiel für Flüssigkeiten konstanter Dichte oder wenn die Sternmaterie entartet ist, wie in Weißen Zwergen und in Neutronensternen. Dann gilt folgender Satz (Parker 1969):

Ergodische Felder im hydrostatischen Gleichgewicht sind im Falle einer Zustandsgleichung der Form $\rho = \rho(P)$ kraftfrei.

Zum Beweis führen wir zunächst eine neue Funktion ein:

$$(19.16) \quad Z(P) = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho}.$$

Dabei ist P_0 der Druck an einer beliebig gewählten Stelle im betrachteten Bereich. Da die Beziehung $P = P(\rho)$ eindeutig umkehrbar sein soll, ist der Integrand eine eindeutige Funktion von P .

Wir gehen nun von der Bedingung magnetohydrostatischen Gleichgewichts in Gl. (19.1) aus. Die magnetische Kraft hat keine Komponente entlang der Feldlinien. Wenn $\partial/\partial l$ die Differentiation längs der Feldlinien bedeutet, dann gilt also

$$(19.17) \quad \frac{\partial P}{\partial l} + \rho \frac{\partial \psi_s}{\partial l} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich nach Division durch ρ längs einer jeden Feldlinie integrieren:

$$(19.18) \quad C = \psi_s + \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = \psi_s + Z(P).$$

Dabei ist die Konstante C für jede Feldlinie fest, sie kann aber von Feldlinie zu Feldlinie variieren. Nun kommt aber jede Feldlinie jeder anderen beliebig nahe. Da ψ_s und $Z(P)$ stetige Funktionen des Ortes sind, müssen die Konstanten C von Feldlinien, die sich beliebig nahe kommen, gleich sein. Es müssen also *alle Feldlinien dieselbe Integrationskonstante* haben; die Gleichung (19.18) gilt also im ganzen Raumgebiet, das vom ergodischen Feld durchsetzt ist! Bilden wir nun den Gradienten von Gl. (19.18) und berücksichtigen wir, daß

$$(19.19) \quad \nabla \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = \frac{1}{\rho} \nabla P,$$

dann folgt

$$(19.20) \quad \nabla \psi_s + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0,$$

oder mit Gl. (19.1)

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 20. Hartmann-Strömung

In § 12 haben wir die Parallelströmung quer zu einem ursprünglich homogenen Magnetfeld behandelt. Dabei haben wir das Strömungsfeld als vorgegeben angenommen und seine Wirkung auf die Feldlinien studiert. Jetzt kommen wir auf dasselbe Problem noch einmal zurück, berücksichtigen aber auch die Rückwirkung des Feldes auf die Materie. Das Geschwindigkeitsfeld ist nun nicht mehr von vorneherein vorgegeben, es stellt sich vielmehr durch die Wechselwirkung ein. Wir behandeln hier nur den stationären Endzustand des Problems. Als Beispiel diskutieren wir jetzt die Parallelströmung zwischen zwei

Platten. Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem zwei unendlich ausgedehnte, starre Platten, die wir bei $z = \pm L$ parallel zur x - y -Ebene legen. Durch diese Platten ströme in x -Richtung eine (inkompressible) Flüssigkeit mit endlicher Leitfähigkeit und mit innerer Reibung (Abb. 20.1).

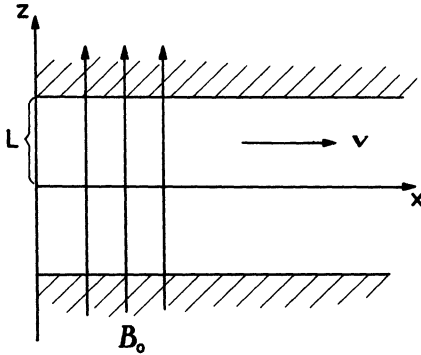


Abb. 20.1 Zur Parallelströmung zwischen zwei ebenen Platten, quer zu einem ursprünglich homogenen Magnetfeld (Hartmann-Strömung).

Die Strömung sei etwa getrieben durch einen Überdruck von links. Die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v} = (v(z), 0, 0)$ hänge nur von z ab. Die Lösung des Problems, wie eine zähe Flüssigkeit durch einen Kanal strömt, ist ein wohl bekanntes Ergebnis der Hydrodynamik. Jetzt möge aber zusätzlich quer durch die Platten ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ gehen. Die strömende Materie deformiert das Feld, dieses wiederum übt Kräfte auf die leitende Flüssigkeit aus. Die stationäre Lösung dieses Problems wurde 1937 von Hartmann angegeben. Wir wollen sie im Folgenden untersuchen.

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ ist B_0 eine Konstante. Das durch die Strömung deformierte Magnetfeld sei

$$(20.1) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1,$$

wobei \mathbf{B}_1 die durch die Geschwindigkeit \mathbf{v} erzeugte Störung ist. Sie hängt dann natürlich nur von z ab, also

$$(20.2) \quad \mathbf{B}_1(z) = (B_{1x}(z), B_{1y}(z), B_{1z}(z)).$$

Es ist dann $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \partial B_{1z} / \partial z$. Da auch die Divergenz des Störfeldes verschwinden muß, ist B_{1z} eine Konstante. Wir geben dann folgende Randbe-

dingungen vor: An den Platten, d.h., bei $z = \pm L$ verschwinde die Materiegeschwindigkeit, und das Feld sei das ungestörte Feld \mathbf{B}_0 . Also

$$(20.3) \quad z = \pm L: B_{1x} = B_{1y} = B_{1z} = 0, \quad v = 0.$$

Die Randbedingungen $B_{1x} = B_{1y} = 0$ bedeuten, daß die Tangentialkomponenten des Magnetfeldes beim Durchgang durch die Oberfläche der Platten stetig ist. Andernfalls hätte man Oberflächenströme, die wir wegen der endlichen Leitfähigkeit ausschließen wollen. Die Normalkomponente des Magnetfeldes muß sowieso stetig übergehen. Da in der Materie der Platten das Feld unverändert gleich \mathbf{B}_0 ist, muß B_{1z} verschwinden. Viskose Flüssigkeiten „kleben“ an festen Oberflächen, und deshalb ist dort $v = 0$.

Wegen $B_{1z} = \text{const}$, muß dann B_{1z} identisch verschwinden, und das Störfeld ist von der Form

$$(20.4) \quad \mathbf{B}_1 = (B_{1x}(z), B_{1y}(z), 0).$$

Im stationären Fall ($\dot{\mathbf{B}} = 0$) wird die Wechselwirkung von Feld und Materie (Gl. (10.13)) durch

$$(20.5) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B}$$

beschrieben. Da $\Delta \mathbf{B}_0 = 0$ ist, reduziert sich diese Gleichung auf

$$(20.6) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B}_1.$$

Nun ist

$$(20.7) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, -vB_0, vB_{1y})$$

und

$$(20.8) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial v}{\partial z} B_0, 0, 0 \right).$$

Damit ergibt sich für die x -Komponente der Gl. (20.6):

$$(20.9) \quad \frac{\partial v}{\partial z} B_0 = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial z^2},$$

für die y -Komponente:

$$(20.10) \quad B_{1y}'' = 0.$$

Dabei bedeuten Striche fortan die Ableitung nach z .

Da wegen Gl. (20.10) B_{1y} eine lineare Funktion von z ist, kann man nur dann die Randbedingung $B_{1y} = 0$ für $z = \pm L$ erfüllen, wenn $B_{1y} \equiv 0$ ist. Unser Problem hat damit nur noch die beiden Variablen B_{1x} und v . Wir erhalten also für \mathbf{B}_1 die Form

$$(20.11) \quad \mathbf{B}_1 = (B_{1x}, 0, 0)$$

und schreiben $B_{1x} = B_1(z)$.

Dann lautet Gl. (20.9)

$$(20.12) \quad v' B_0 = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} B_1''.$$

Weitere Beziehungen liefern uns die Bewegungsgleichung (16.11) (im stationären Fall ohne Gravitation)

$$(20.13) \quad \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \nu \Delta \mathbf{v}$$

sowie die Maxwell-Gleichung (16.7)

$$(20.14) \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}_1.$$

Da \mathbf{v} nur eine x -Komponente hat, die nur von z abhängt, ist

$$(20.15) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0.$$

Also lautet die x -Komponente der Bewegungsgleichung:

$$(20.16) \quad 0 = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x + \rho \nu v''$$

und die y - bzw. z -Komponente:

$$(20.17) \quad 0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_y,$$

$$(20.18) \quad 0 = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_z.$$

Aus Gl. (20.14) wird wegen

$$(20.19) \quad \nabla \times \mathbf{B}_1 = (0, B_1', 0)$$

$$(20.20) \quad j_x = 0, \quad j_z = 0, \quad j_y = \frac{c}{4\pi} B_1'.$$

Damit ist

$$(20.21) \quad \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} (B_1' B_0, 0, -B_1 B_1').$$

Beim Einsetzen in Gl. (20.16), (20.17) und Gl. (20.18) verbleibt nur

$$(20.22) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} B_1' B_0 + \rho v v'',$$

$$(20.23) \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} B_1 B_1'.$$

Um schließlich zu einer Differentialgleichung für \mathbf{v} zu kommen, müssen wir in den obigen Bewegungsgleichungen den Druckgradienten und das Störfeld \mathbf{B}_1 eliminieren. Dazu berechnen wir die elektrische Feldstärke. Mit Gl. (20.7) und (20.20) ergibt sich wegen $B_{1y} \equiv 0$ aus dem Ohmschen Gesetz

$$(20.24) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, \frac{c}{4\pi\lambda} B_1' + \frac{v}{c} B_0, 0).$$

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke sind dann

$$(20.25) \quad E_x = E_z = 0, \quad E_y = \frac{1}{c} (v B_0 + \frac{c^2}{4\pi\lambda} B_1').$$

\mathbf{E} hat also wie \mathbf{j} nur eine y -Komponente.

Wir behaupten nun, daß P linear von x abhängt, d.h.

$$(20.26) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\Pi = \text{const.}$$

Dazu betrachten wir die zweite Bewegungsgleichung (20.23). Aus ihr folgt

$$(20.27) \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} (B_1 B_1') = 0,$$

da B_1 nur von z abhängt. Also ist Π nur eine Funktion von x . Es ist aber auch

$$(20.28) \quad - \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0,$$

denn die rechte Seite von Gl. (20.22) hängt nur von z ab. P ist also eine Funktion der Form

$$(20.29) \quad P = - \Pi x + f(z).$$

Aus der Integration von Gl. (20.12) folgt andererseits

$$(20.30) \quad v B_0 = - \frac{c^2}{4\pi\lambda} B_1' + A,$$

wobei A eine Integrationskonstante ist. Setzen wir das in die Gleichung (20.25) für E ein, erhalten wir

$$(20.31) \quad E_y = \frac{1}{c} A = E_0 = \text{const.}$$

E ist also konstant und hat die Form $E = (0, E_0, 0)$. Damit können wir B_1' aus Gl. (20.30) berechnen zu

$$(20.32) \quad B_1' = \frac{4\pi\lambda}{c^2} (c E_0 - v B_0).$$

Das setzen wir schließlich in die Bewegungsgleichung (20.22) ein:

$$(20.33) \quad - \Pi = \frac{\lambda B_0}{c^2} (c E_0 - v B_0) + \rho v v''.$$

Jetzt haben wir eine lineare, inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für v mit konstanten Koeffizienten. Als Randbedingung hatten wir

$$(20.34) \quad v = 0 \quad \text{bei} \quad z = \pm L.$$

Eine partikuläre Lösung dieser inhomogenen Gleichung ist

$$(20.35) \quad v_i = \text{const} = \frac{c^2 \Pi}{\lambda B_0^2} + c \frac{E_0}{B_0}.$$

Zur Konstruktion der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung benötigen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$(20.36) \quad \rho \nu v'' = \frac{\lambda B_0^2}{c^2} v.$$

Der Ansatz:

$$(20.37) \quad v = \text{const.} \exp(\alpha z)$$

gibt:

$$(20.38) \quad \alpha = \frac{B_0}{c} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho \nu}}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$(20.39) \quad v = a \cdot \exp(\alpha z) + b \cdot \exp(-\alpha z).$$

Wegen der Symmetrie des Problems in z reduziert sie sich auf

$$(20.40) \quad v = \text{const} (\exp(\alpha z) + \exp(-\alpha z)) = C \cdot \cosh(\alpha z),$$

wobei die Konstante C aus den Randbedingungen zu ermitteln ist. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$(20.41) \quad v = \left(\frac{c^2 \Pi}{\lambda B_0^2} + c \frac{E_0}{B_0} \right) (1 + C \cosh(\alpha z)),$$

und C ist so zu wählen, daß $v(L) = v(-L) = 0$ wird. Wir führen jetzt eine dimensionslose Zahl $M = \alpha L$ ein, dann gilt

$$(20.42) \quad \cosh(\alpha z) = \cosh\left(M \frac{z}{L}\right),$$

und die allgemeine Lösung

$$(20.43) \quad v = \left(\frac{c^2 \Pi}{\lambda B_0^2} + c \frac{E_0}{B_0} \right) \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{Mz}{L}\right)}{\cosh M} \right)$$

erfüllt die Randbedingung unseres Strömungsproblems.

Die dimensionslose Größe

$$(20.44) \quad M = \frac{B_0 L}{c} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho \nu}}$$

heißt die *Hartmannsche Zahl*; sie ist groß, wenn die Wirkung des Magnetfeldes die Reibung überwiegt. Je nach der Größe von M gibt es verschiedene Strömungsprofile, die wir im Folgenden untersuchen wollen. Dazu nehmen wir die Leitfähigkeit λ als fest vorgegeben an und variieren Magnetfeld und Viskosität.

Wie ändert sich das Strömungsprofil, wenn man bei endlicher, fest vorgegebener Viskosität M von Null ($B_0 = 0$) bis Unendlich ($B_0 \rightarrow \infty$) laufen läßt? Für den Grenzfall $B_0 \rightarrow 0$ ist die obige Lösung (20.43) nicht sinnvoll, da durch B_0 dividiert wurde. Wir gehen zurück zur Differentialgleichung (20.33). Für $B_0 \rightarrow 0$ geht sie über in

$$(20.45) \quad -\Pi = \rho \nu v''.$$

Daraus folgt, daß v von der Form

$$(20.46) \quad v(z) = a z^2 + b z + c$$

ist; diese Parabel ist das Profil einer Strömung ohne Magnetfeld bei endlicher Viskosität, wie man sie aus der Hydrodynamik her kennt (vgl. Abb. 20.2).

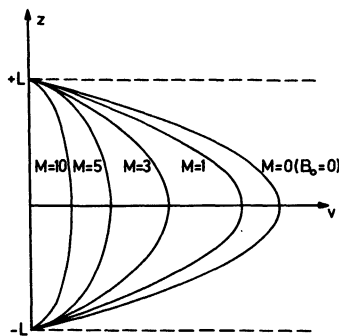


Abb. 20.2 Strömungsprofile bei fest vorgegebener Viskosität in Abhängigkeit von der Hartmannzahl M .

Mit wachsendem Magnetfeld wächst $M \sim B_0$, das Profil wird immer flacher. Wir betrachten den Grenzfall $M \rightarrow \infty$ ($B_0 \rightarrow \infty$). Für beliebig große M kann man approximieren:

$$(20.47) \quad \frac{\cosh(Mz/L)}{\cosh M} = \frac{e^{Mz/L} + e^{-Mz/L}}{e^M + e^{-M}} \approx \frac{e^{Mz/L}}{e^M} = e^{-M(1-z/L)}.$$

Da innen $1 - z/L > 0$ gilt, geht dieser Ausdruck im Grenzfalle $M \rightarrow \infty$ gegen Null. Da gleichzeitig $B_0 \rightarrow \infty$ geht, bekommen wir nach Gl. (20.43) $v = 0$. Im Falle eines beliebig starken Magnetfeldes ist also gar keine Strömung möglich.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man bei festem Magnetfeld B_0 die Viskosität zwischen Null und Unendlich variieren läßt. Bei verschwindender Viskosität $\nu \rightarrow 0$ geht $M \rightarrow \infty$, wegen der obigen Abschätzung (20.47) geht dann nach Gl. (20.43) v gegen einen endlichen Wert, der unter anderem durch B_0 bestimmt ist. v wird dann insbesondere unabhängig von z . Wegen der verschwindenden Viskosität ist ein kastenförmiges Geschwindigkeitsprofil möglich (Abb. 20.3).

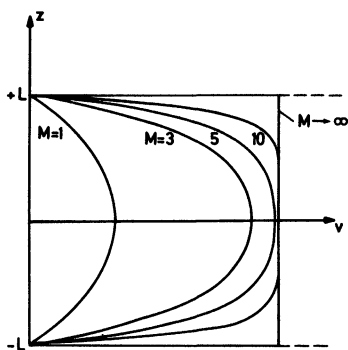


Abb. 20.3 Strömungsprofile bei fest vorgegebenem Magnetfeld in Abhängigkeit von der Hartmannzahl M .

Mit zunehmender Viskosität wird das vorher kastenförmige Strömungsprofil immer mehr abgerundet und abgeflacht. Für $\nu \rightarrow \infty$ geht M gegen Null, dann geht der Quotient $\cosh(Mz/L)/\cosh M$ gegen Eins, und die zweite Klammer in Gl. (20.43) verschwindet. Wegen der beliebig hohen Viskosität ist wieder keine Strömung möglich.

Bei der Hartmann-Strömung tritt quer zum mechanisch bewegten Plasma ein elektrisches Feld (Gl. (20.31)) auf. Man kann dieses Strömungsproblem daher als ein Modell für einen magnetohydrodynamischen Generator ansehen. Nähere Einzelheiten dazu und weitere Strömungsprobleme findet man bei Cap (1972).

§ 21. Magnetischer Auftrieb

Bisher haben wir Lösungen der magnetohydrodynamischen Gleichungen für den inkompressiblen Fall behandelt oder das Gas durchweg als isotherm angenommen. Wir haben also das Hauptaugenmerk auf den magnetohydrodynamischen Aspekt gerichtet, den thermodynamischen Teil des Problems aber durch eine Näherung – etwa die der Isothermie – abgetan. Obwohl die Isothermie oft eine gute Näherung ist, so gibt es doch in der Natur häufig Fälle, bei denen es gerade auf das Zusammenspiel zwischen Magnetohydrodynamik und Thermodynamik ankommt. Man denke nur an die Sonnenflecken mit ihren starken Magnetfeldern, die optisch entdeckt worden sind, also aufgrund ihrer thermischen Anomalie. Offensichtlich ist dort das Magnetfeld dafür verantwortlich, daß die Temperatur in den Flecken um etwa 1000° niedriger ist als in der Umgebung.

Als ein Beispiel für die Wechselwirkung zwischen magnetohydrodynamischem Verhalten und thermischem Verhalten behandeln wir jetzt den Auftrieb, den ein magnetischer Schlauch im Innern eines Sterns erfährt. Wir werden hier – im Gegensatz zu unserem bisherigen Vorgehen – den magnetohydrodynamischen Aspekt sehr vereinfacht behandeln; wir werden dagegen mehr in die thermodynamischen Details gehen.

a) *Hydrostatisches Gleichgewicht*

Wir betrachten also ein Plasma, das wie die Materie im Innern eines Sterns in einem Schwerfeld geschichtet ist. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die Krümmung der Äquipotentialflächen und nehmen das Schwerfeld als homogen an. Dann lautet die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$(21.1) \quad \frac{dP}{dz} = -g \rho.$$

Dabei ist g der Betrag der (konstanten) Schwerebeschleunigung g , die in die $-z$ -Richtung wirken soll. Die Temperaturverteilung werde dadurch bestimmt, daß in z -Richtung ein bestimmter Energiestrom fließen soll. Das entspricht den Verhältnissen in Sternen, in denen die meist durch Kernreaktionen erzeugte Energie nach außen transportiert werden muß. Welche Temperaturverteilung sich einstellt, wird durch die Art des Energietransportes bestimmt. Wir denken uns die Temperaturverteilung $T = T(z)$ in der Höhe vorgegeben. Die Zustandsgleichung sei die eines idealen Gases

$$(21.2) \quad P_G = \frac{\Re}{\mu} \rho T$$

(μ ist das mittlere Molekulargewicht, \mathfrak{R} die Gaskonstante und P_G ist der Gasdruck). Wir führen nun noch einige Abkürzungen ein: Schreiben wir die Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht in der Form

$$(21.3) \quad \frac{d \ln P_G}{dz} = - \frac{g \rho}{P_G} = - \frac{\mu g}{\mathfrak{R} T} = - \frac{1}{H_P},$$

so tritt die schon in § 18 definierte *homogene Schichtdicke*

$$(21.4) \quad H_P = \frac{\mathfrak{R} T}{g \mu}$$

auf.

Aus der vorgegebenen Temperaturverteilung $T(z)$ kann man die Ableitung dT/dz gewinnen und die dimensionslose Größe

$$(21.5) \quad \nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \bigg/ \frac{1}{P} \frac{dP}{dz}$$

bilden. Das Zeichen ∇ („Nabla“) ist nicht mit dem Vektoroperator ∇ zu verwechseln. Die Größe ∇ beschreibt die Temperaturverteilung in Abhängigkeit von der Druckverteilung in der Schichtung. Sie beschreibt also eine Änderung der Temperatur mit der Höhe, wobei der Druck als Maß für die Höhe genommen ist. Anders dagegen ist die Größe

$$(21.6) \quad \nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

zu verstehen. Dabei ist $\gamma = c_P/c_V$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. bei konstantem Volumen. ∇_{ad} beschreibt die Temperaturänderung, die ein Materieelement erfährt, das eine Druckänderung erleidet und das dieser Zustandsänderung adiabatisch folgt. Bei einatomigen idealen Gasen ist $\nabla_{\text{ad}} = 2/5$. In der Theorie des Sternaufbaus (vgl. etwa Schwarzschild 1958) wird gezeigt, daß thermische Konvektion einsetzt, wenn an einer Stelle im Stern ∇ den Wert ∇_{ad} überschreitet. Wir nehmen für das Folgende an, es sei überall $\nabla < \nabla_{\text{ad}}$.

b) Magnetfeldschlauch im Druckgleichgewicht

Wir betrachten nun in unserer Schicht einen Magnetfeldschlauch, den wir durch einen unendlich langen, horizontal liegenden Zylinder approximieren. Im Zylinder sei das Feld konstant und parallel zur Zylinderachse. Wir wollen den Durchmesser des Schlauches als klein annehmen (klein gegen H_P), sodaß

wir die Variationen von P , ρ und T quer durch den Schlauch nicht zu berücksichtigen brauchen. Wir können also allgemein von Werten von P , ρ und T im Schlauch und in der unmittelbaren Nachbarschaft sprechen. Der magnetische Druck sei $P_M = B^2/8\pi$, der Gasdruck im Schlauch sei P_{Gi} . Dann definieren wir die Größe

$$(21.7) \quad \zeta = \frac{P_M}{P_M + P_{Gi}}$$

und setzen voraus, daß $\zeta \ll 1$ sei, daß also das Magnetfeld im Schlauch nur einen geringen Beitrag zum Gesamtdruck im Schlauch liefern möge. Außen sei kein Magnetfeld, der Druck sei dort also allein durch Gasdruck gegeben. Im Folgenden soll immer der Index i die Größen im Schlauch, der Index a die Größe außerhalb des Schlauches bezeichnen. Wir nehmen nun an, daß magnetohydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Das heißt, es sei

$$(21.8) \quad P_{Gi} + P_M = P_{Ga} = P.$$

Mit P (ohne Index) bezeichnen wir also den Gesamtdruck innen wie außen. Es gilt dann

$$(21.9) \quad P_{Gi} = (1 - \zeta)P, \quad P_M = \zeta P, \quad P_a = P.$$

Ferner möge in einem bestimmten Augenblick auch kein Auftrieb auf den Schlauch wirken. Das heißt, es muß dann

$$(21.10) \quad \rho_i = \rho_a$$

gelten. Dann kann aber wegen $P_{Gi} < P_{Ga}$ die Innentemperatur nicht gleich der Außentemperatur sein:

$$(21.11) \quad T_i = \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{P_{Gi}}{\rho_i} < \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{P_{Ga}}{\rho_a} = T_a$$

oder mit Gl. (21.9)

$$(21.12) \quad T_i = (1 - \zeta) T_a.$$

Wenn magnetohydrostatisches Gleichgewicht gelten soll, dann muß die Materie im Schlauch kühler sein als die Materie der Umgebung. In unserem Beispiel können also nicht gleichzeitig magnetohydrostatisches und thermodynamisches Gleichgewicht herrschen!

Wir wollen im Folgenden immer annehmen, daß magnetohydrostatisches Gleichgewicht gilt; das muß also auf Kosten des thermodynamischen Gleichgewichts gehen. Das ist eine für das Sterninnere sinnvolle Annahme; die Zeitskalen, mit denen sich mechanische Störungen ausgleichen, sind dort viel kürzer als die Zeiträume, in denen sich Temperaturunterschiede verschmieren.

Im Laufe der Zeit muß aber der kühlere Schlauch seine Temperatur an die der Umgebung anpassen. Dann muß seine Dichte absinken, da sonst die Bedingung (21.8) verletzt würde: der Schlauch muß also aufsteigen.

Um diesen Vorgang besser behandeln zu können, führen wir einige neue Bezeichnungen ein. Wir werden den Schlauch zu Beginn und am Ende eines Zeitintervalls δt betrachten. In dieser Zeit habe er die Wegstrecke Δz zurückgelegt. Alle Größen zu Beginn des Zeitintervalles sollen den Index 0 bekommen. Ferner bezeichne Δ Unterschiede in der Umgebung zwischen neuem und altem Ort des Schlauches, δ die entsprechenden Unterschiede im Schlauch. Dagegen bezeichne D Unterschiede zwischen Größen im Schlauch und außerhalb. Für die Temperatur gilt also (vgl. Abb. 21.1):

$$(21.13) \quad \delta T = T_i - T_{i0}, \quad \Delta T = T_a - T_{a0}, \quad DT_0 = T_{i0} - T_{a0},$$

$$DT = T_i - T_a.$$

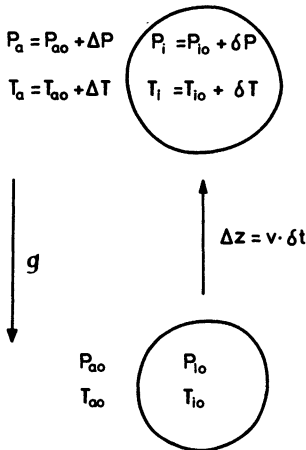


Abb. 21.1 Zur Definition der einen aufsteigenden magnetischen Schlauch beschreibenden Größen.

Aus diesen Definitionen folgt:

$$(21.14) \quad DT = T_i - T_a = DT_0 + \delta T - \Delta T.$$

Unsere Annahme vom Druckgleichgewicht läßt sich dementsprechend schreiben: $DP_0 = 0$ für den Anfang und $DP = 0$ für jeden späteren Zeitpunkt, oder auch

$$(21.15) \quad \delta P = \Delta P.$$

c) Wärmeausgleich

Wir müssen uns jetzt mit dem Problem des Wärmeausgleichs zwischen der Umgebung und dem kühleren Schlauch befassen. Wir betrachten dazu ein Stück endlicher Länge unseres (unendlich langen) Zylinders. Durch Wärmeleitung oder durch irgendeinen anderen Transportmechanismus möge unserem Zylinderstück vom Volumen V pro Sekunde die Energie ϵ zugeführt werden. Dann muß zwischen den zeitlichen Änderungen von P und T im Schlauch die Beziehung

$$(21.16) \quad \left(\frac{\delta T}{T_i} - \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta P}{P_i} \right) c_P \rho_i V T_i - \epsilon \delta t = 0$$

gelten. Sie ist nichts weiter als der erste Hauptsatz der Thermodynamik. Denken wir uns die Zustandsänderung einmal bei konstantem Druck ablaufend, dann folgt aus Gl. (21.16) die wohlbekannte Beziehung $\epsilon \delta t = c_P \rho_i V \delta T$. Denken wir uns zum anderen die Zustandsänderung adiabatisch, d.h. mit $\epsilon = 0$ ablaufend, so folgt tatsächlich die adiabatische Beziehung $\delta T/T_i = \nabla_{\text{ad}} \delta P/P_i$. Damit ist Gl. (21.16) bewiesen. Um ϵ zu bestimmen, müßten wir das Problem des Wärmetransports für unseren kühlen Schlauch ehrlich lösen. Wir begnügen uns hier mit einem Näherungsansatz und nehmen an, daß ϵ proportional zu DT ist. Der Fluß an Wärme, der pro Zeiteinheit in unser Schlauchstück fließt, sei also proportional zum Temperaturunterschied zwischen innen und außen. Da zum anderen die Größe $c_P \rho_i V T_i / \epsilon$ die Dimension einer Zeit hat, liegt folgender Ansatz nahe:

$$(21.17) \quad \frac{\epsilon}{c_P \rho_i V T_i} = - \frac{1}{\tau} \frac{DT}{T_i}.$$

Die neu eingeführte Größe τ hat die Dimension einer Zeit; wir werden sie später anschaulich deuten.

Der Energiesatz (21.16) läßt sich nun in der Form

$$(21.18) \quad \frac{\delta T}{T_i} - \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta P}{P_i} + \frac{1}{\tau} \frac{DT}{T_i} \delta t = 0$$

schreiben. Die Zustandsgrößen P_i und T_i kommen nur in Verbindung mit den Differentialen δ und D vor. Da wir in ζ (Gl. (21.7)) nur in der niedrigsten Ordnung bleiben wollen, ist es gleichgültig, ob wir $\delta P/P_i$ oder $\delta P/P_{Gi}$ oder $\delta P/P_a$ schreiben, denn der Unterschied ist von höherer Ordnung. Wir werden daher im Folgenden statt P_i und P_a einfach P schreiben, statt T_i und T_a einfach T . Definieren wir nun

$$(21.19) \quad \theta = \frac{DT}{T} \quad ,$$

so gilt offenbar in dieser Näherung

$$(21.20) \quad \delta \theta = \theta_i - \theta_{i0} = \left(\frac{DT}{T} \right)_i - \left(\frac{DT}{T} \right)_{i0} = \frac{DT}{T} - \frac{DT_0}{T}.$$

Dann ergibt sich wegen Gl. (21.14) aus dem Energiesatz (21.18)

$$(21.21) \quad \begin{aligned} \delta \theta &= \frac{DT}{T} - \frac{DT_0}{T} = -\frac{\Delta T}{T} + \frac{\delta T}{T} \\ &= -\frac{\Delta T}{T} + \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta P}{P} - \theta \frac{\delta t}{\tau}. \end{aligned}$$

Nach Gl. (21.5) und (21.15) gilt

$$(21.22) \quad \frac{\Delta T}{T} = \nabla \frac{\Delta P}{P} = \nabla \frac{\delta P}{P},$$

also ergibt sich mit Gl. (21.3)

$$(21.23) \quad \begin{aligned} \delta \theta &= (-\nabla + \nabla_{\text{ad}}) \frac{\delta P}{P} - \theta \frac{\delta t}{\tau} \\ &= (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \frac{\delta z}{H_P} - \theta \frac{\delta t}{\tau}, \end{aligned}$$

wobei $\delta z = \Delta z$ die während δt vom Schlauch zurückgelegte Wegstrecke ist.

Diese Gleichung ist äquivalent mit der Differentialgleichung

$$(21.24) \quad \frac{d\theta}{dt} = (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \frac{v_z}{H_P} - \frac{\theta}{\tau}.$$

Sie hat folgende Bedeutung: Wenn wir den Schlauch mit einer beliebigen Geschwindigkeit $v_z(t)$ in z -Richtung bewegen, dann liefert sie den relativen Temperaturunterschied θ als Funktion der Zeit. Ist speziell $v_z = 0$, dann heißt die Lösung

$$(21.25) \quad \theta = \text{const. exp}(-t/\tau).$$

Damit haben wir die angekündigte anschauliche Deutung von τ : Es ist die Zeitkonstante, mit der sich der ruhende Schlauch exponentiell an die Temperatur seiner Umgebung anpaßt.

d) Die Aufstiegs geschwindigkeit

Wenn v_z zeitlich konstant ist, wird Gl. (21.24) zu einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung (21.25) des homogenen Anteils und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir erhalten also dann

$$(21.26) \quad \theta = \text{const. exp}(-t/\tau) + (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \frac{\tau}{H_P} \cdot v_z.$$

Mit der Einstellzeit τ stellt sich also ein Temperaturunterschied θ zwischen innen und außen ein, der nicht mehr von der Zeit abhängt. Wir erhalten damit eine stationäre Lösung: eine bestimmte Aufstiegs geschwindigkeit stellt sich gerade so ein, daß immer ein konstanter Temperaturunterschied herrscht. Dies ist auch noch genähert der Fall, wenn sich v_z nur langsam ändert; genauer: wenn sich v_z erst innerhalb von Zeiträumen merklich verändert, die groß sind im Vergleich zu τ .

Wir nehmen an, das sei bei unserem Magnetschlauch der Fall. Dann kann man in Gl. (21.24) $\partial\theta/\partial t$ vernachlässigen, und man erhält

$$(21.27) \quad v_z = \frac{H_P}{\tau} \frac{\theta}{\nabla - \nabla_{\text{ad}}}.$$

Da gleichzeitig in jedem Augenblick $\rho_a = \rho_i$ gelten soll, erhalten wir mit Gl. (21.12)

$$(21.28) \quad \theta = \frac{DT}{T} = \frac{T_i - T_a}{T} = -\zeta.$$

Setzen wir Gl. (21.28) in Gl. (21.27) ein, so erhalten wir für die Aufstiegs-
geschwindigkeit

$$(21.29) \quad v_z = \frac{H_p \zeta}{\tau (\nabla_{\text{ad}} - \nabla)} .$$

In den Schichten eines Sternes, in denen der Energietransport durch Strahlung geschieht, ist immer $\nabla_{\text{ad}} > \nabla$, dort ist also $v_z > 0$, dort können also Magnetfeldschläuche aufsteigen. Der Vorgang ist der folgende: Der Schlauch befindet sich in jedem Zeitpunkt in einer Höhe, in der er im Druckgleichgewicht mit seiner Umgebung ist und in der der Auftrieb verschwindet. Das ist nur möglich, wenn seine Materie kühler ist als die seiner Umgebung. Nun strömt Wärme in das Innere des Schlauches, wegen des Druckgleichgewichtes verringert sich die Dichte dort. Dann aber steigt der Schlauch auf, bis er wieder im mechanischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung ist. Dort beginnt das Spiel von neuem.

Es ist nach diesem Mechanismus also im Prinzip möglich, daß im Innern eines Sternes erzeugte Magnetfelder in höhere Schichten aufsteigen. Wenn sonst alles fest bleibt, steigen Schläuche mit kleinerem Durchmesser schneller auf, denn sie gleichen sich thermisch schneller an die Umgebung an; für sie ist also τ kleiner. Bei Schläuchen sehr kleinen Durchmessers wird schließlich die Reibung wichtig.

Gurm und Wentzel (1967) haben abgeschätzt, daß durch den hier beschriebenen Mechanismus Materie aus dem tiefen Innern eines Sterns an die Oberfläche transportiert werden kann. Man denke sich etwa statt unseres unendlich langen Zylinders eine geschlossene Feldkonfiguration, bei der die Feldlinien in einem Bereich der Lineardimension L geschlossen sind. Gurm und Wentzel nennen so ein Gebilde eine *magnetische Zelle*. Die Materie in solch einer Zelle steigt dann gemäß Gl. (21.29) wie ein Ballon in der umgebenden Materie nach oben, getrieben vom magnetischen Auftrieb. Um die in Gl. (21.29) noch nicht spezifizierte Zeitkonstante τ festzulegen, muß man den Wärmetransport zwischen Zelle und Umgebung näher studieren. Die genannten Autoren untersuchten den Fall eines Hauptreihensterns von etwa 10 Sonnenmassen. Diese Sterne decken ihren Energieverlust durch die Fusion des Wasserstoffs zu Helium in ihrem Zentralgebiet. Die Phase, während der der Stern seinen Energiebedarf in dieser Weise deckt, dauert etwa 10^7 Jahre. Eine magnetische Zelle, bei der das Verhältnis von magnetischem Druck zu Gasdruck etwa 10^{-5} ist und deren Lineardimension unter 10^5 km liegt, kann dann aus dem tiefen Innern zur Oberfläche gelangen innerhalb von Zeiträumen, die kurz sind im Vergleich zu den 10 Millionen Jahren, die der Stern Hauptreihenstern bleibt.

Kapitel IV

MAGNETOHYDRODYNAMISCHE WELLEN

§ 22. Einfache Wellenlösungen

Es ist schwierig, das System der magneto hydrodynamischen Grundgleichungen des § 16 im allgemeinen Fall zu lösen. Für analytische Lösungen muß man sich auf Grenzfälle beschränken. In den §§ 18 und 20 haben wir bereits statische und stationäre Lösungen untersucht. In diesem und in dem folgenden Paragraphen werden wir uns mit kleinen Störungen befassen, die an einem homogenen Plasma angebracht werden. Wir gehen dabei aus von einer stationären Gleichgewichtslösung (gekennzeichnet durch den Index 0), die wir mit einer zeitabhängigen Störung (gekennzeichnet durch den Index 1) versehen. Die Störgrößen seien klein im Verhältnis zu den ungestörten Größen. Wir benutzen dann eine lineare Störungstheorie, d.h., wir vernachlässigen alle Glieder, in denen die Störgrößen in quadratischer und höherer Ordnung auftreten.

a) Das linearisierte Gleichungssystem

Wir setzen also an

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \\ (22.1) \quad \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, & P &= P_0 + P_1, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1, & \rho &= \rho_0 + \rho_1. \end{aligned}$$

Dabei genügen die Größen mit dem Index Null den Grundgleichungen (16.7) bis (16.13) für den stationären Fall. Ohne Gravitationsfeld ($\mathbf{g} = 0$) und bei vernachlässigbarer Viskosität ($\nu = 0$) erhalten wir dann für die Gleichgewichtslösung

$$(22.2) \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0,$$

$$(22.3) \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$(22.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

$$(22.5) \quad \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}_0 = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0,$$

$$(22.6) \quad \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla P_0 + \frac{1}{c} \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0,$$

$$(22.7) \quad \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0.$$

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß das ungestörte Magnetfeld \mathbf{B}_0 homogen sei und in einem kartesischen Koordinatensystem in x -Richtung zeige, also $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$, ($B_0 = \text{const.}$). Ferner sei die Leitfähigkeit des Plasmas beliebig hoch ($\lambda \rightarrow \infty$), und die Materie möge im ungestörten Fall ruhen ($\mathbf{v}_0 = 0$). Außerdem seien die ungestörte Dichte und der Druck räumlich konstant.

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus Gl. (22.2), daß auch $\mathbf{j}_0 = 0$, und aus Gl. (22.5) folgt $\mathbf{E}_0 = 0$. Wir gehen nun mit den Ansätzen (22.1) in das System der Gl. (16.7) bis (16.12). Berücksichtigen wir Gl. (22.2) bis (22.7), und vernachlässigen wir ferner alle Terme, die in den Störungen von höherer als erster Ordnung sind, dann erhalten wir das folgende System:

$$(22.8) \quad \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1,$$

$$(22.9) \quad \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t},$$

$$(22.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0,$$

$$(22.11) \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0,$$

$$(22.12) \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \frac{1}{c} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0,$$

$$(22.13) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1).$$

Wir müssen noch die Zustandsgleichung (16.13) berücksichtigen, d.h. $P = P(\rho, T)$. Wie schon im hydrostatischen Fall, genügt eine Gleichung dieser Form nicht, solange wir nicht erklären, wie die Temperatur verteilt ist. Wir wollen annehmen, daß wir ein ideales Gas vorliegen haben. Dann folgt für den Gleichgewichtsfall aus der Konstanz von P_0 und ρ_0 , daß auch T_0 konstant ist. Für die Störungen wollen wir annehmen, daß sie so schnell ablaufen, daß keine Wärme abgeführt wird, daß also an jeder Stelle die Zustandsänderung *adiabatisch* ist. Dann gilt für die Beziehung zwischen Druck und Dichte:

$$(22.14) \quad P_0 + P_1 \sim (\rho_0 + \rho_1)^\gamma,$$

wobei γ der Adiabatenexponent ist ($\gamma = 5/3$ für einatomige Gase). Wir erhalten also als weitere Gleichung

$$(22.15) \quad \frac{P_1}{P_0} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

Die Gleichungen (22.8) bis (22.13) und (22.15) bilden ein homogenes, lineares System für das räumliche und zeitliche Verhalten der Störgrößen B_1 , j_1 , E_1 , v_1 , P_1 , ρ_1 . Da weder der Ort noch die Zeit explizit auftreten, ist das System mit einem Exponentialansatz lösbar.

Es ist möglich, das obige System auf eine einzige Differentialgleichung für v_1 zu reduzieren. Das geht nach folgendem Schema:

- 1) Nach dem Ohmschen Gesetz (22.11) läßt sich E_1 durch v_1 ausdrücken, nach Gleichung (22.9) ergibt sich damit B_1 als Funktion von v_1 . Nach Gleichung (22.8) bekommt man damit weiterhin j_1 als Funktion von v_1 , also hat man schließlich das Produkt $j_1 \times B_0$ als Funktion von v_1 .
- 2) Durch die Kontinuitätsgleichung (22.13) bekommt man ρ_1 und durch die Adiabatengleichung (22.15) schließlich auch P_1 als Funktion von v_1 .

Setzt man das zusammen in die Bewegungsgleichung (22.12) ein, so ergibt sich eine lineare, homogene Differentialgleichung für v_1 allein. Dieses Schema werden wir für alle folgenden Lösungen des Systems verwenden. Zunächst untersuchen wir verschiedene spezielle Lösungen unseres Gleichungssystems.

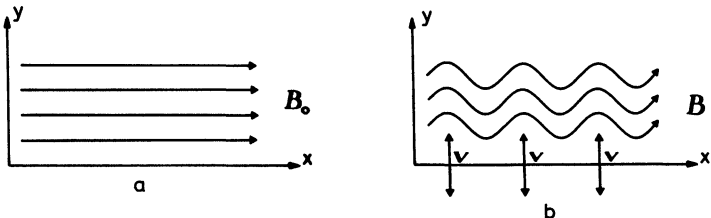


Abb. 22.1 (a) Das ungestörte Parallelfeld, (b) die Feldlinien im Fall von Alfvén-Wellen der Gl. (22.16). Die Bewegungsrichtung steht senkrecht zum ungestörten Feld, die Ausbreitungsrichtung ist parallel dazu.

b) Alfvén-Wellen

Im ersten Fall nehmen wir an, daß alle Störgrößen nur von x und t abhängen mögen, und daß die Störgröße v_1 nur eine y -Komponente habe: $v_1 = (0, v_{1y}(x, t), 0)$. Die Geschwindigkeitsstörung soll also senkrecht zum ungestörten Magnetfeld $B_0 = (B_0, 0, 0)$ erfolgen (Abb. 22.1). Für v_{1y} machen wir den Ansatz:

$$(22.16) \quad v_{1y}(x, t) = C \cdot \exp(-i\omega t \pm ilx),$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Da die Störung nur von x und t abhängig ist, gilt $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, $\partial/\partial t = -i\omega$. Für unseren speziellen Fall benötigen wir nur den Teil 1) des Eliminationschemas.

Aus dem Ohmschen Gesetz (22.11) folgt

$$(22.17) \quad v_1 \times B_0 = (0, 0, -v_{1y} B_0) = -c E_1,$$

und mit Gl. (22.9) ergibt sich daraus (der Strich bedeutet die Ableitung nach x)

$$(22.18) \quad -c \nabla \times E_1 = (0, B_0 v'_{1y}, 0) = -i\omega B_1.$$

Aus Gl. (22.8) folgt damit

$$(22.19) \quad \frac{4\pi}{c} j_1 = -\frac{1}{i\omega} (0, 0, B_0 v''_{1y})$$

und weiterhin

$$(22.20) \quad j_1 \times B_0 = -\frac{c}{4\pi i\omega} (0, B_0^2 v''_{1y}, 0).$$

Setzt man das in die Bewegungsgleichung (22.12) ein, so erhält man schließlich wegen $\partial P_1/\partial y = 0$

$$(22.21) \quad -\omega \rho_0 v_{1y} = \frac{B_0^2}{4\pi\omega} v''_{1y}.$$

So bleibt von der Bewegungsgleichung nur die y -Komponente übrig. Gehen wir mit unserem Ansatz (22.16) in obige Differentialgleichung (22.21), erhalten wir

$$(22.22) \quad l^2 = \frac{4\pi\omega^2 \rho_0}{B_0^2}$$

oder eine Phasengeschwindigkeit

$$(22.23) \quad v_A = \frac{\omega}{l} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}.$$

Die Lösung für die Geschwindigkeitsstörung ist also

$$(22.24) \quad v_{1y}(x, t) = C \cdot \exp[-i\omega(t \mp x/v_A)].$$

Gemäß dem obigen Schema erhält man dann nach Gl. (22.18)

$$(22.25) \quad B_{1y} = \mp B_0 \cdot \frac{v_{1y}}{v_A}$$

sowie nach Gl. (22.17)

$$(22.26) \quad E_{1z} = \frac{v_{1y}}{c} B_0.$$

In dieser Weise lassen sich alle weiteren Störgrößen errechnen.

Wir erhalten also als eine spezielle Lösung unseres Systems fortlaufende Wellen mit der Phasengeschwindigkeit v_A . Nach ihrem Entdecker nennt man diese Wellen *Alfvén-Wellen*. v_A heißt die *Alfvén-Geschwindigkeit*, sie hängt nur ab von der Feldstärke und der Dichte, ist also eine typische Größe für die jeweilige Plasmakonfiguration. Die Alfvén-Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich unsere Störung längs der Feldlinien ausbreitet. Für starke Magnetfelder (anschaulich: „große Rückstellkraft“ der Feldlinien) ist v_A groß, für hohe Dichte dagegen wird v_A klein. Da die Ausbreitungsrichtung (x -Richtung) senkrecht zur sich ändernden Amplitude (y -Richtung) steht, handelt es sich um *Transversalwellen* (vgl. Abb. 22.1). Eine Störung des Magnetfeldes an einem bestimmten Raumpunkt breitet sich – wie bei einer angezupften Saite – längs der Feldlinien nach beiden Seiten mit der Geschwindigkeit v_A ins Unendliche aus. Das ist nicht verwunderlich, denn die Differentialgleichung (22.21) ist formal die einer schwingenden Saite.

Im Rahmen unserer magneto-hydrodynamischen Näherung benutzen wir vereinfachte Maxwell'sche Gleichungen. Mit den vollen Maxwell'schen Gleichungen geht die Alfvén-Geschwindigkeit im Grenzfall $\rho_0 \rightarrow 0$ nicht wie bei uns nach Unendlich, sondern nähert sich der Lichtgeschwindigkeit. Die Alfvén-Wellen gehen dabei in elektromagnetische Wellen über (vgl. § 39).

Für das Sonneninnere folgt bei einer Dichte von $\rho_0 \approx 1 \text{ g/cm}^3$ und einer Feldstärke von $B_0 \approx 10^4 \text{ G}$ $v_A \approx 2.8 \times 10^3 \text{ cm/sec}$. Im interstellaren Raum

ergibt sich mit $\rho_0 \approx 1.6 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ und $B_0 \approx 10^{-6} \text{ G}$ eine Alfvén-Geschwindigkeit von $v_A \approx 2.3 \times 10^5 \text{ cm/sec}$.

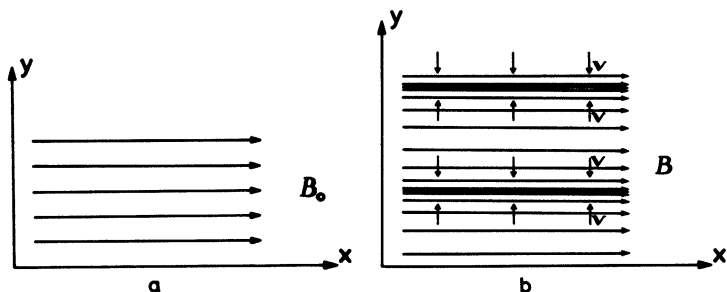


Abb. 22.2 (a) Das ungestörte Magnetfeld, (b) die Feldlinien im Fall magnetohydrodynamischer Kompressionswellen von Gl. (22.28), Bewegungsrichtung und Ausbreitungsrichtung stehen senkrecht zum ungestörten Feld.

c) Magnetohydrodynamische Kompressionswellen

Nachdem wir im Abschnitt b) reine Transversalwellen betrachtet haben, soll hier ein anderer Spezialfall untersucht werden. Es sei wieder ein homogenes Feld der Form $B_0 = (B_0, 0, 0)$ vorausgesetzt. Wir machen den Ansatz

$$(22.27) \quad \mathbf{v}_1 = (0, v_{1y}(y, t), 0),$$

$$(22.28) \quad v_{1y}(y, t) = C \cdot \exp(-i\omega t \pm i l y)$$

und lösen damit das Gleichungssystem (22.8) bis (22.13), (22.15). Nun sei $\partial/\partial x = 0$ und $\partial/\partial z = 0$ für alle Störgrößen, während $\partial/\partial y = \pm i l$ und $\partial/\partial t = -i\omega$ ist. Da die y -Komponente v_{1y} der Störung von y abhängt, handelt es sich bei diesem Ansatz um eine Longitudinalwelle; die Ausbreitungsrichtung fällt mit der Richtung der Stör-Amplitude zusammen (Abb. 22.2).

Dabei wird das Plasma komprimiert, wir brauchen also jetzt die Adiabatenbeziehung (22.15)

$$(22.29) \quad P_1 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_1 = v_s^2 \cdot \rho_1.$$

Hier ist $v_s = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2}$ die (adiabatische) Schallgeschwindigkeit. Die Ableitung $\partial/\partial y$ bezeichnen wir mit einem Strich. Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung (22.13)

$$(22.30) \quad i \omega \rho_1 = \rho_0 v_{1y}' \quad .$$

Mit Gl. (22.29) ergibt sich

$$(22.31) \quad P_1 = v_s^2 \frac{\rho_0 v_{1y}'}{i \omega} \quad .$$

Damit haben wir schon den Teil 2) des Schemas von Abschnitt a) benutzt, also P_1 durch v_1 ausgedrückt. Teil 1) des Schemas liefert dann

$$(22.32) \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = (0, 0, -v_{1y} B_0) = -c \mathbf{E}_1,$$

$$(22.33) \quad c \nabla \times \mathbf{E}_1 = (v_{1y}' B_0, 0, 0) = i \omega \mathbf{B}_1,$$

$$(22.34) \quad i \omega \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1 = (0, 0, -v_{1y}'' B_0)$$

und damit

$$(22.35) \quad \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{c}{4\pi i \omega} (0, -v_{1y}'' B_0^2, 0).$$

Das setzen wir wieder in die Bewegungsgleichung (22.12) ein, sie hat nur noch die y -Komponente:

$$(22.36) \quad \rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -i \omega \rho_0 v_{1y} = -P_1' - \frac{1}{4\pi i \omega} v_{1y}'' B_0^2.$$

Gemäß Gl. (22.31) drücken wir auch P_1' durch v_{1y} aus und bekommen

$$(22.37) \quad -i \omega \rho_0 v_{1y} = -v_s^2 \frac{\rho_0}{i \omega} v_{1y}'' - \frac{B_0^2}{4\pi i \omega} v_{1y}'' ,$$

also

$$(22.38) \quad \omega^2 v_{1y} = -\left(v_s^2 + \frac{B_0^2}{4\pi \rho_0}\right) v_{1y}'' = -(v_s^2 + v_A^2) v_{1y}'' .$$

Geht man mit dem Ansatz (22.28) in diese Differentialgleichung ein, so ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$(22.39) \quad u^2 = \frac{\omega^2}{l^2} = v_s^2 + v_A^2 .$$

Diese Longitudinalwellen nennt man *magneto hydrodynamische Kompressionswellen*. Sie laufen senkrecht zu den Feldlinien und bewegen sich dabei mit ei-

ner Phasengeschwindigkeit, deren Quadrat sich additiv aus den Quadraten von Schallgeschwindigkeit und Alfvén-Geschwindigkeit zusammensetzt. Im Grenzfall des verschwindenden Magnetfeldes wird die Phasengeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit $u = v_s$, bei sehr großem Magnetfeld überwiegt die Alfvén-Geschwindigkeit, $u \rightarrow v_A$.

Sowohl bei den Alfvén-Wellen wie auch bei den magneto hydrodynamischen Kompressionswellen ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz bzw. von der Wellenzahl. Wir haben es also mit einer dispersionsfreien Wellenausbreitung zu tun. Die Wellen verschiedener Frequenz breiten sich gleich schnell aus. Wir werden später in § 39 sehen, daß dies nur näherungsweise wahr ist.

Wir haben jetzt zwei Fälle der Wellenausbreitung in einem Plasma kennengelernt, bei denen die geometrischen Verhältnisse besonders einfach sind. Im nächsten Paragraphen behandeln wir einen allgemeineren Fall, der die bisher behandelten beiden Wellenarten als Spezialfälle enthält.

§ 23. Wellen im beliebigen Winkel zum Magnetfeld

Jetzt soll der allgemeine Fall einer Wellenausbreitung im beliebigen Winkel zu einem homogenen Magnetfeld untersucht werden. Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem so, daß sich die Welle in z -Richtung ausbreitet. Die Wellenfläche stehe also senkrecht zur z -Achse. Weiterhin sei das homogene Feld B_0 parallel zur y - z -Ebene und schließe mit der z -Achse den Winkel ϑ ein (Abb. 23.1).

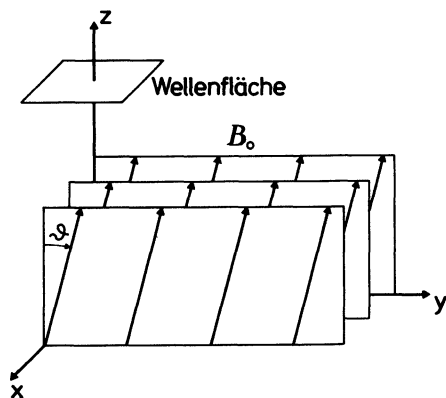


Abb. 23.1 Zur Ausbreitung von Wellen in einem Winkel ϑ zu einem homogenen Magnetfeld. Das Koordinatensystem wurde so gelegt, daß sich die Welle in z -Richtung ausbreitet und daß die x -Komponente des ungestörten Magnetfeldes verschwindet.

Dann ist

$$(23.1) \quad \mathbf{B}_0 = (0, B_0 \sin \vartheta, B_0 \cos \vartheta).$$

Wie in § 22 setzen wir voraus, daß

$$(23.2) \quad \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{g} = 0, \quad \nu = 0, \quad j_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad P_0 = \text{const.}, \quad \rho_0 = \text{const.}$$

Wir machen dann für die Störungen den Ansatz

$$(23.3) \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{B}_1, \rho_1, P_1 \sim \exp[i(\omega t - lz)].$$

Dann ist wieder $\partial/\partial x = 0$ und $\partial/\partial y = 0$, während $\partial/\partial z = -il$ und $\partial/\partial t = i\omega$ gilt.

Im Spezialfall $\vartheta = 0^\circ$ erhalten wir als Lösung unseres Ansatzes die Alfvén-Wellen, bei $\vartheta = 90^\circ$ die magneto hydrodynamischen Kompressionswellen. Für beliebige Werte von ϑ ist es jedoch nicht mehr möglich, die Störgleichungen (22.8) bis (22.13) und (22.15) auf eine einzige Differentialgleichung zu reduzieren. Statt dessen haben wir das volle System von 7 Gleichungen zu lösen.

a) Das lineare, homogene Gleichungssystem

Aus Gl. (22.8) bekommen wir

$$(23.4) \quad j_1 = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{ilc}{4\pi} (B_{1y}, -B_{1x}, 0).$$

Der Strom fließt also in der Wellenebene. Hieraus folgt

$$(23.5) \quad \frac{1}{c} j_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{ilB_0}{4\pi} (-B_{1x} \cos \vartheta, -B_{1y} \cos \vartheta, B_{1y} \sin \vartheta).$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (22.12) ergibt

$$(23.6) \quad i\omega \rho_0 \mathbf{v}_1 + \nabla P_1 - \frac{1}{c} j_1 \times \mathbf{B}_0 = 0$$

und

$$(23.7) \quad i\omega \rho_0 v_{1x} = -\frac{ilB_0}{4\pi} B_{1x} \cos \vartheta,$$

$$(23.8) \quad i \omega \rho_0 v_{1y} = - \frac{i l B_0}{4\pi} B_{1y} \cos \vartheta,$$

$$(23.9) \quad i \omega \rho_0 v_{1z} = i l P_1 + \frac{i l B_0}{4\pi} B_{1y} \sin \vartheta.$$

Weiter erhalten wir aus der Adiabatenbeziehung (22.15) wie im letzten Paragraphen

$$(23.10) \quad P_1 = v_s^2 \rho_1.$$

Aus Gl. (22.9) und (22.11) erhalten wir hingegen

$$(23.11) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0).$$

Nun folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ und $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, daß auch $\partial B_{1z}/\partial z = 0$ ist. Also ist $B_{1z} = 0$, daher lautet die linke Seite von Gl. (23.11)

$$(23.12) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = i \omega (B_{1x}, B_{1y}, 0).$$

Für die rechte Seite berechnen wir

$$(23.13) \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = (v_{1y} B_0 \cos \vartheta - v_{1z} B_0 \sin \vartheta, -v_{1x} B_0 \cos \vartheta, v_{1x} B_0 \sin \vartheta)$$

und daraus

$$(23.14) \quad \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = i l B_0 (-v_{1x} \cos \vartheta, -v_{1y} \cos \vartheta + v_{1z} \sin \vartheta, 0).$$

Aus Gl. (23.11) erhalten wir also die beiden Gleichungen

$$(23.15) \quad i \omega B_{1x} = -i l B_0 v_{1x} \cos \vartheta,$$

$$(23.16) \quad i \omega B_{1y} = -i l B_0 (v_{1y} \cos \vartheta - v_{1z} \sin \vartheta).$$

Schließlich ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung (22.13) in unserem Fall

$$(23.17) \quad i \omega \rho_1 = i l \rho_0 v_{1z}.$$

Die sieben Gleichungen (23.7) bis (23.10) und (23.15) bis (23.17) bilden ein lineares homogenes Gleichungssystem für die sieben Variablen v_{1x} , v_{1y} , v_{1z} , B_{1x} , B_{1y} , P_1 und ρ_1 . Durch Einsetzen von Gleichung (23.10) in Gl. (23.9) können wir P_1 eliminieren und damit das System auf 6 Gleichungen reduzieren. Das System ist homogen und besitzt daher eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet.

b) Die Dispersionsrelation

Zur besseren Übersicht ordnen wir die Gleichungen um. Es entsteht die folgende Koeffizientenmatrix. Die jeweilige Variable ist dabei in der oberen Zeile vermerkt, rechts steht die Nummer der zugehörigen Gleichung:

	v_{1x}	B_{1x}	v_{1y}	v_{1z}	B_{1y}	ρ_1	
(23.7)	$\omega \rho_0$	$\frac{l B_0}{4\pi} \cos \vartheta$	0	0	0	0	[23.7]
(23.15)	$l B_0 \cos \vartheta$	ω	0	0	0	0	[23.15]
(23.8)	0	0	$\omega \rho_0$	0	$\frac{l B_0}{4\pi} \cos \vartheta$	0	[23.8]
(23.9)	0	0	0	$\omega \rho_0$	$\frac{-l B_0}{4\pi} \sin \vartheta$	$-l v_s^2$	[23.9]
(23.16)	0	0	$l B_0 \cos \vartheta$	$-l B_0 \sin \vartheta$	ω	0	[23.16]
(23.17)	0	0	0	$-l \rho_0$	0	ω	[23.17]

Wie man sieht, zerfällt das System in zwei Systeme, und zwar bilden die Gleichungen (23.7) und (23.15) ein System für v_{1x} und B_{1x} , während die Gleichungen (23.8), (23.9), (23.16) und (23.17) ein System für die restlichen Variablen bilden. Entsprechend zerfällt die Determinante in ein Produkt zweier Unterdeterminanten

$$(23.19) \quad D = D_1 \cdot D_2,$$

wobei D_1 die Determinante ist, die aus der Untermatrix der Koeffizienten von v_{1x} und B_{1x} gebildet wurde, D_2 ist die Determinante der Restmatrix.

Wenn D verschwinden soll, muß entweder D_1 oder D_2 oder es müssen alle beide verschwinden.

Zunächst möge die Determinante D_1 verschwinden. Dann gilt

$$(23.20) \quad \rho_0 \omega^2 - \frac{l^2 B_0^2 \cos^2 \vartheta}{4\pi} = 0,$$

also folgt für die Phasengeschwindigkeit u

$$(23.21) \quad u^2 = \frac{\omega^2}{l^2} = \frac{B_0^2}{4\pi \rho_0} \cos^2 \vartheta = v_A^2 \cdot \cos^2 \vartheta.$$

Diese partikuläre Lösung ist eine Alfvén-Welle. In die Ausbreitungsgeschwindigkeit längs der z -Achse geht dabei nur die Komponente des Magnetfeldes B_0 in z -Richtung ein. Für diese Lösung mit $D_1 = 0$ kann $D_2 \neq 0$ sein, entsprechend erhält man in diesem Fall für die Lösung des zweiten Systems nur die triviale Lösung, also $v_{1y} = v_{1z} = B_{1y} = \rho_1 = 0$.

Jetzt betrachten wir die andere partikuläre Lösung, die dadurch entsteht, daß die Unterdeterminante D_2 verschwindet, also

$$(23.22) \quad \begin{aligned} D_2 &= l \rho_0 (l B_0 \cos \vartheta \cdot l v_s^2 \frac{l B_0}{4\pi} \cos \vartheta - \omega l v_s^2 \rho_0 \omega) \\ &\quad - \omega (l B_0 \cos \vartheta \cdot \rho_0 \omega \frac{l B_0}{4\pi} \cos \vartheta + l B_0 \sin \vartheta \cdot \rho_0 \omega \frac{l B_0}{4\pi} \sin \vartheta - \omega \rho_0^2 \omega^2) \\ &= v_s^2 \frac{l^4 B_0^2}{4\pi} \rho_0 \cos^2 \vartheta - v_s^2 l^2 \rho_0^2 \omega^2 - \frac{l^2 B_0^2}{4\pi} \rho_0 \omega^2 + \rho_0^2 \omega^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch $\rho_0^2 l^4$ folgt:

$$(23.23) \quad u^4 - (v_A^2 + v_s^2) u^2 + v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta = 0.$$

Ist $\vartheta = 90^\circ$, d.h. $\cos \vartheta = 0$, ist also die Wellenfläche parallel zum Feld, so folgt

$$(23.24) \quad u^2 = v_A^2 + v_s^2.$$

Das ist eine Relation, die wir schon in § 22 c (Gl. (22.39)) kennengelernt haben. Wir bekommen auch hier eine longitudinale, magnetohydrodynamische Kompressionswelle, die sich quer zu den Feldlinien ausbreitet.

Bei $\vartheta = 0^\circ$ ist $\cos \vartheta = 1$, also gilt

$$(23.25) \quad u^4 - v_A^2 u^2 - v_s^2 u^2 + v_A^2 v_s^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen für u^2

$$(23.26) \quad u^2 = v_A^2, \quad u^2 = v_s^2.$$

Hier bekommt man also die sich längs des Feldes ausbreitende transversal Alfvén-Welle und außerdem noch die Schallwelle, die sich mit der Geschwindigkeit v_s parallel zu B_0 ausbreitet.

Die partikuläre Lösung $D_2 = 0$ enthält also beide in § 22 behandelten Spezialfälle der Wellenausbreitung. Hier kann natürlich $D_1 \neq 0$ sein, entsprechend erhält man dann für das erste (kleine) System nur die triviale Lösung $v_{1x} = B_{1x} = 0$.

Der Fall $D_1 = 0$, $D_2 \neq 0$ lieferte eine Lösung, der Fall $D_1 \neq 0$, $D_2 = 0$ dagegen zwei Lösungen. Also hat man im Fall $D_1 \cdot D_2 = 0$ drei verschiedene Lösungen vorliegen, d.h. drei verschiedene Typen von Wellen in eine vorgegebene Richtung ϑ . Das Verhalten dieser drei Lösungen wollen wir im Folgenden näher untersuchen. Wir beschränken uns dabei wieder auf Aussagen über die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellenfronten; genau genommen wären noch die Koeffizienten unseres Gleichungssystems auszurechnen, die Amplitude, Phase und Polarisationsgrad dieser Wellen festlegen. Das soll hier nicht geschehen.

c) Ungleichungen

Wir kehren zunächst zurück zur partikulären Lösung $D_2 = 0$, lassen aber beliebige Winkel ϑ zu.

Gl. (23.23) läßt sich auch schreiben in der Form

$$(23.27) \quad u^4 - (v_A^2 + v_s^2) u^2 + v_A^2 v_s^2 = v_A^2 v_s^2 \sin^2 \vartheta,$$

also

$$(23.28) \quad (u^2 - v_A^2)(u^2 - v_s^2) = v_A^2 v_s^2 \sin^2 \vartheta.$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln u_1^2 , u_2^2 ; wir wählen die Indizes so, daß $u_1^2 > u_2^2$. Dann gelten die folgenden drei Beziehungen

$$(23.29) \quad u_1^2 \geq \max(v_A^2, v_s^2),$$

$$(23.30) \quad u_2^2 \leq \min(v_A^2, v_s^2),$$

$$(23.31) \quad u_2^2 \leq v_A^2 \cos^2 \vartheta,$$

wobei das Gleichheitszeichen jeweils im Fall $\vartheta = 0^\circ$ gilt. Zum Beweis von Gl. (23.29) und Gl. (23.30) definieren wir die Funktion

$$(23.32) \quad \begin{aligned} f(w) &= w^2 - (v_A^2 + v_s^2)w + v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta \\ &= (w - v_A^2) \cdot (w - v_s^2) - v_A^2 \cdot v_s^2 \cdot \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

$f(w)$ stellt eine Parabel dar (Abb. 23.2).

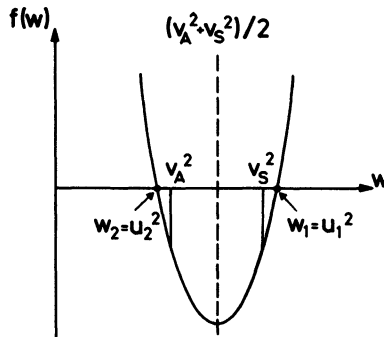


Abb. 23.2 Die Kurve $f(w)$ für den Fall $v_A^2 < v_s^2$.

Ihre Schnittpunkte mit der w -Achse liegen bei u_1^2 und u_2^2 . Im Minimum ist $\frac{\partial}{\partial w} f(w) = 0$, also ist

$$(23.33) \quad w_{\min} = \frac{1}{2}(v_A^2 + v_s^2).$$

Die Symmetrieachse der Parabel liegt in der Mitte zwischen v_A^2 und v_s^2 . Die Parabel ist nach oben geöffnet, da

$$(23.34) \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2} f(w_{\min}) > 0$$

ist. Sie hat also wirklich die in Abb. 23.2 skizzierte Lage.

Da die linke Seite von Gl. (23.28) größer als Null sein muß, gilt entweder

$$(23.35) \quad u_1^2 > v_A^2, \quad u_1^2 > v_s^2$$

oder für die andere Lösung

$$(23.36) \quad u_2^2 < v_A^2, \quad u_2^2 < v_s^2.$$

Damit folgen die Behauptungen (23.29) und (23.30). Weiterhin ist nach Gl. (23.23) und (23.32)

$$\begin{aligned} f(v_A^2 \cos^2 \vartheta) &= v_A^4 \cos^4 \vartheta - v_A^4 \cos^2 \vartheta - v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta + v_A^2 v_s^2 \cos^2 \vartheta \\ (23.37) \quad &= v_A^4 (\cos^2 \vartheta - 1) \cos^2 \vartheta \\ &= -v_A^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta < 0. \end{aligned}$$

Der Wert $w = v_A^2 \cdot \cos^2 \vartheta$ liegt gemäß Abb. 23.2 also zwischen u_2^2 und u_1^2 . Damit ist die Behauptung (23.31) bewiesen.

Unser Gleichungssystem war zerfallen. Die Welle der Wellenzahl l hat also in Richtung ϑ drei Phasengeschwindigkeiten u , für die gilt:

$$\begin{aligned} u^2 &= v_A^2 \cos^2 \vartheta, \\ (23.38) \quad u^2 &= u_1^2 \geq \max(v_A^2, v_s^2), \\ u^2 &= u_2^2 \leq \min(v_A^2, v_s^2), \end{aligned}$$

wobei

$$(23.39) \quad u_2^2 \leq v_A^2 \cos^2 \vartheta.$$

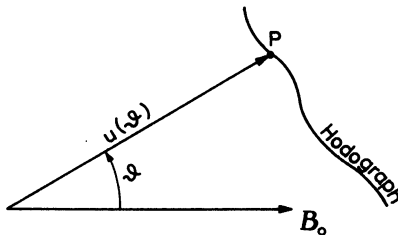


Abb. 23.3 Konstruktion eines Hodographen zu vorgegebener Geschwindigkeit $u(\vartheta)$.

d) Der Hodograph der Wellenausbreitung (Friedrichs-Diagramm)

Um die erhaltenen Relationen besser zu veranschaulichen, benutzen wir *Hodographen*. Ein Hodograph ist ein Polardiagramm der Geschwindigkeiten

mit dem Polarwinkel ϑ und der Phasengeschwindigkeit u als Abstand vom Ursprung (Abb. 23.3). Wir legen dazu die Abszisse in die Richtung von B_0 . Auf einem Strahl, der mit der Abszisse den Winkel ϑ einschließt, tragen wir die verschiedenen (i. a. drei) Phasengeschwindigkeiten ab, die eine Welle in diese Richtung haben kann (Abb. 23. 4).

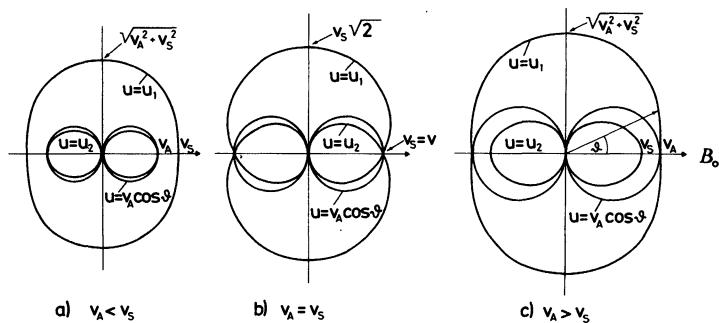


Abb. 23.4 Hodographen für die drei Wellentypen.

Wir betrachten zunächst den Fall $v_A < v_s$. Der Ort, den der Fahrstrahl $u = v_A \cos \vartheta$ in Abhängigkeit von ϑ beschreibt, wird durch zwei Kreise vom Durchmesser v_A gebildet, die in der eingezeichneten Weise im Koordinatensystem liegen (Abb. 23.4 a). Die Länge des Fahrstrahles von u_2 ist wegen Gl. (23.31) immer kürzer als der Fahrstrahl von $u = v_A \cos \vartheta$; es ergibt sich also ein horizontal liegendes Oval, das wie eingezeichnet im Kreis liegt. Der Fahrstrahl von u_1 bildet ein aufrecht stehendes Oval: bei $\vartheta = 0^\circ$ ist $u_1 = v_s$ nach Gl. (23.28), für $\vartheta = 90^\circ$ ergibt Gl. (23.27) $u_1 = (v_A^2 + v_s^2)^{1/2}$. (Obwohl es so scheint, sind die Hodographen für u_1 und u_2 keine Ellipsen.) Auf entsprechende Weise bekommt man die Hodographen für $v_A = v_s$ und $v_A > v_s$ (Abb. 23.4 b und 23.4 c). In diesen Fällen ist der u_1 -Hodograph nicht mehr konvex, insbesondere im Fall $v_A = v_s$ ist er bei $\vartheta = 0^\circ$ bzw. 90° eingeschnürt. Diese Darstellungen der Phasengeschwindigkeiten in einem Polar diagramm sind auch unter dem Namen *Friedrichs-Diagramme* bekannt. Wir finden für alle drei Fälle:

Es gibt immer eine *schnelle* (u_1) und eine *langsame* (u_2) *Kompressionswelle*, dazwischen eine *Alfvén-Welle* der Geschwindigkeit $v_A \cos \vartheta$. Im Fall von $\vartheta = 90^\circ$ (bzw. 270°) bleibt nur eine reine Kompressionswelle der Geschwindigkeit $(v_A^2 + v_s^2)^{1/2}$ übrig.

Wir haben oben die Typen von ebenen Wellen diskutiert, die in einem beliebigen Winkel zu einem homogenen Magnetfeld im Plasma möglich sind. Da-

bei haben wir nicht berücksichtigt, daß sich solche ebenen Wellen durch entsprechende Phasenlage verstärken oder gegenseitig kompensieren können.

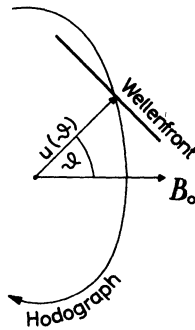


Abb. 23.5 Zusammenhang zwischen Hodograph und Wellenfront.

Gegeben sei ein „magneto hydrodynamischer Knall“ im Ursprung des Koordinatensystems, d.h. eine Störung, von der aus nach allen Richtungen Wellen fortlaufen mögen. Der Einfachheit halber betrachten wir das eindimensionale Problem, nehmen also die Anfangsstörung als gleichförmig längs der x -Achse verteilt an. Dann sind alle Größen von x unabhängig. Die Ausbreitungsrichtungen der Wellen stehen senkrecht auf der x -Achse, und der ganze Vorgang kann in der y - z -Ebene beschrieben werden. In einiger Entfernung von der x -Achse kann man diese Wellen in guter Näherung durch unsere ebenen Wellen in der entsprechenden Richtung approximieren. Sie laufen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Man kann sich den Vorgang mit Hilfe des Hodographen veranschaulichen. Die Welle in Richtung ϑ befindet sich nach einer Sekunde an der entsprechenden Stelle des Hodographen, ihre Wellenfront geht durch denselben Punkt und steht senkrecht auf der ϑ -Richtung (Abb. 23.5).

Wir konstruieren auf diese Weise die Wellenfronten für alle Richtungen ϑ . Die Gesamtheit aller dieser Wellenfronten besitzt eine Einhüllende. Da sich benachbarte Wellenfronten in der Einhüllenden schneiden, so folgt, daß auf der Einhüllenden benachbarte Wellenrichtungen gleiche Phase besitzen; dort verstärken sich also die Wellen. An anderen Stellen löschen sie sich aus. So stellt die Einhüllende den Ort dar, wo sich die Wirkungen der Wellen verstärken. Nach einer weiteren Sekunde haben sich die Wellen in den verschiedenen Richtungen doppelt so weit bewegt, die Einhüllende ist, sich selbst ähnlich bleibend, größer geworden.

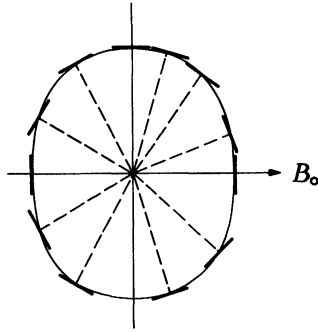


Abb. 23.6 Flächen gleicher Phase in der y - z -Ebene für die schnellen Kompressionswellen. Die Ausbreitung erfolgt nach allen Richtungen fort von der (senkrecht zur Zeichenebene stehenden) x -Achse.

In Abb. 23.6 haben wir die Wellenfronten gleicher Phase für die schnellen Kompressionswellen dargestellt. Die Schnittpunkte, also die Orte, an denen sich die Wellen verstärken, bilden wieder eine ovale Figur. Die Wellen breiten sich also nach allen Richtungen in der y - z -Ebene aus, allerdings mit verschiedener Geschwindigkeit.

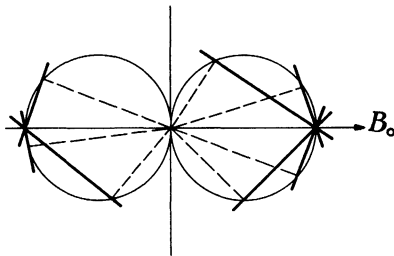


Abb. 23.7 Flächen gleicher Phase für die Alfvén-Wellen in der Ebene. Die Ausbreitung erfolgt nach beiden Seiten entlang der Feldlinien.

Das sieht bei den Alfvén-Wellen ganz anders aus (Abb. 23.7): Aus elementargeometrischen Gründen (Thales-Satz) schneiden sich alle Flächen gleicher Phase in den dem Ursprung gegenüberliegenden Punkten der eingezeichneten Kreise. Diese zwei Punkte bilden die Einhüllende. Dort addieren sich alle Wellenfronten. Da sich diese beiden Punkte jeweils mit v_A vom Ursprung entfernen, erhält man beim magnetohydrodynamischen Knall zwei „Wellenpakete“, die sich mit Alfvén-Geschwindigkeit längs des Feldes von der x -Achse fortbewegen.

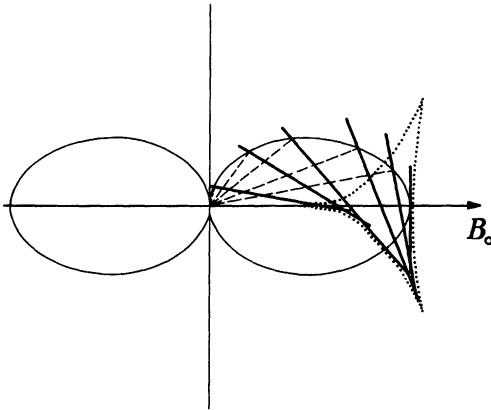


Abb. 23.8 Die Einhüllenden der Flächen gleicher Phase für langsame Kompressionswellen in der y - z -Ebene bilden Kurven mit je drei Spitzen (punktiert).

Ähnlich erhält man bei den langsamen Kompressionswellen bevorzugte Ausbreitungsrichtungen (Abb. 23.8). Hier besteht die Einhüllende aus zwei geschlossenen Kurven in der y - z -Ebene, die jeweils drei Spitzen haben. Diese beiden Kurven bewegen sich von der x -Achse fort und vergrößern sich, wobei sie sich selbst ähnlich bleiben. Die Ausbreitung erfolgt also anisotrop nach beiden Richtungen, parallel und antiparallel zum Magnetfeld (Abb. 23.9).

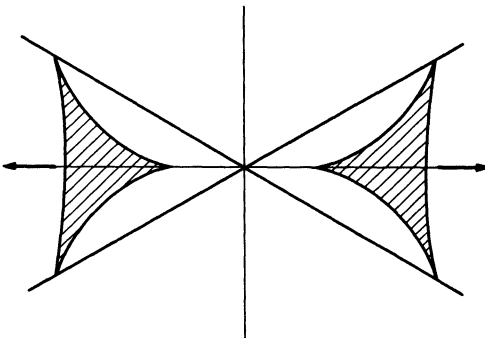


Abb. 23.9 Die einhüllenden Spitzkurven (vgl. Abb. 23.8) bewegen sich parallel und antiparallel zum Magnetfeld. Sie vergrößern sich dabei, sich selbst ähnlich bleibend. Deshalb erfährt nur die Materie im Innern des in der y - z -Ebene gezeichneten Geradenpaares etwas von der Störung. Außerhalb löschen sich die Wellen verschiedener Richtung aus.

§ 24. Anschauliche Diskussion des Stabilitätsproblems

Wenn man eine statische Gleichgewichtslösung der magnetohydrodynamischen Grundgleichungen gefunden hat, so ist damit noch nicht gesagt, daß sie auch in der Natur vorkommen kann. Dazu ist notwendig, daß die Gleichgewichtslösung auch *stabil* ist.

Wir betrachten jetzt statische Lösungen der Grundgleichungen, also Lösungen des Systems

$$(24.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

$$(24.2) \quad \nabla P_0 = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \rho_0 \mathbf{g}$$

und fragen nach ihrer Stabilität. Manchmal ist es sehr schwer, stabile Lösungen zu finden, zum Beispiel wenn man versucht, ein Plasma durch ein Magnetfeld zusammenzuhalten. Das ist einer der Gründe, warum die kontrollierte Kernfusion so viele technologische Schwierigkeiten bereitet.

In diesem Paragraphen werden wir eine Reihe von einfachen, statischen Gleichgewichtskonfigurationen durch anschauliche Betrachtungen auf Stabilität hin untersuchen. In den beiden folgenden Paragraphen wird dann das Problem der Stabilität magnetohydrostatischer Lösungen allgemeiner behandelt werden.

a) Instabilität eines Plasmazyllinders mit toroidalem Außenfeld

In einem zylindrischen Gefäß sei ein Plasma eingeschlossen. Schickt man dann einen starken Strom in Längsrichtung hindurch, so löst sich das Plasma von den Wänden ab und schnürt sich durch das eigene Magnetfeld ein. Das nennt man den *Pinch-Effekt*. Die dabei entstehende Gleichgewichtskonfiguration können wir durch ein einfaches Modell beschreiben. Wir denken uns einen Plasmaschlauch, der selbst kein Magnetfeld enthält und der von einem äußeren Magnetfeld in dem sonst leeren Außenraum im Gleichgewicht gehalten wird. Ein konstanter Flächenstrom, der in Längsrichtung auf der Schlauchoberfläche fließt, erzeugt im umgebenden Vakuum ein toroidales Magnetfeld, das dem inneren Gasdruck P_{Gi} das Gleichgewicht hält (Abb. 24.1a). Es gilt dann nach Gl. (17.18):

$$(24.3) \quad P_{Gi} = \frac{B_0^2}{8\pi}.$$

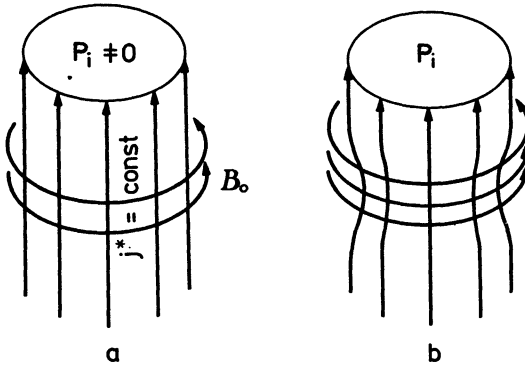


Abb. 24.1 (a) Ein Plasmaschlauch werde vom Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten. Gasdruck im Innern und magnetischer Druck außen halten sich die Waage. (b) Im Falle einer Einschnürung wächst das Außenfeld an, die Konfiguration ist instabil.

Wie verhält sich nun der Plasmaschlauch, wenn man irgendwo eine Verengung anbringt (Abb. 24.1b)? Für das Feld im Vakuum gilt natürlich

$$(24.4) \quad j_0 \sim \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0.$$

Wegen der Geometrie muß \mathbf{B}_0 axialsymmetrisch sein; schreibt man sich die Bedingungen (24.4) in Zylinderkoordinaten hin (vgl. § 4), so sieht man sofort, daß für eine axialsymmetrische Lösung $B_{0\varphi} \sim 1/s$ gelten muß, wobei s der Abstand von der Zylinderachse ist. In der Verengung steigt also der äußere magnetische Druck an; dagegen bleibt der Innendruck konstant, da das Gas nach oben und unten im Zylinder ausweichen kann. Die Gleichgewichtsbedingung (24.3) ist also so verletzt, daß sich das Plasma noch weiter einschnürt. Daß der magnetische Druck bei einer Verengung ansteigt, sieht man auch anschaulich aus Abb. (24.1. b), denn bei einer Verengung muß sich aus geometrischen Gründen der Abstand der Stromlinien verringern. Die Flächenstromdichte wird größer, und mit ihr vergrößert sich wegen Gl. (17.14) das Außenfeld. Diese Art der Instabilität nennt man „Würstchen-Instabilität“ (englisch „sausage-instability“).

Unser Plasmaschlauch ist aber auch noch gegenüber anderen Störungen instabil. Wir wollen ihn durch Knicken so stören, wie es in Abb. 24.2 dargestellt ist. Wir betrachten nun die Feldlinien, die sich in der Nachbarschaft des Schlauchs um ihn schließen. In der Nähe der Innenseite des Knickes liegen sie dichter als in der Nähe der Außenseite. Der zugehörige magnetische Druck wirkt gerade so, daß der Knick noch verstärkt wird. Wir können auch die auf der

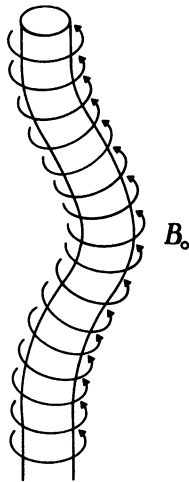


Abb. 24.2 Knick-Instabilität.

Oberfläche laufenden Linien des ursprünglich konstanten Flächenstromes betrachten und finden, daß nach Anbringung der Störung der Flächenstrom auf der Innenseite größer ist als auf der Außenseite. Der magnetische Druck ist aber in unserem Fall proportional zur Flächenstromdichte. Also hat er die Tendenz, den Knick zu verstärken. Diese Art von Instabilität nennt man *Knick-Instabilität*.

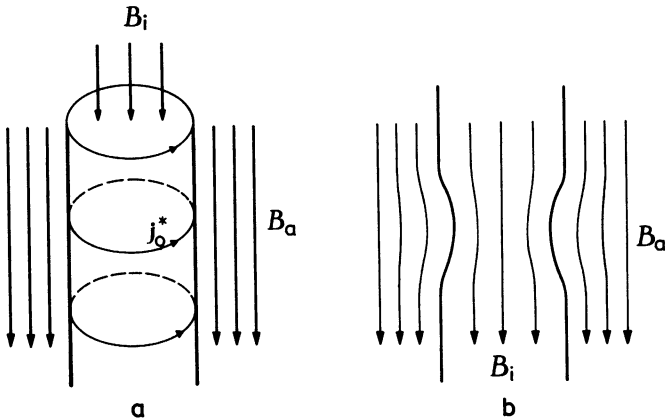


Abb. 24.3 (a) Das äußere Magnetfeld liegt parallel zur Achse des Schlauches. Gasdruck und innerer Magnetdruck halten dem äußeren Magnetdruck die Waage. (b) Bei Einschnürung sinkt das äußere Magnetfeld ab, das innere steigt, die Konfiguration ist stabil.

b) Plasmazyylinder mit homogenem Außenfeld

Es gibt Plasmaschlauchkonfigurationen, die stabil gegenüber Einschnürungen sind. Dazu betrachten wir einen Plasmazyylinder, der durch ein zu seiner Achse paralleles Feld im Gleichgewicht gehalten wird. Ein von Quellen im Unendlichen erzeugtes homogenes Magnetfeld laufe parallel zur Achse des Schlauches (Abb. 24.3 a). Durch einen toroidalen Oberflächenstrom kann man nun das homogene Feld im Innern so weit abschwächen, daß der Gasdruck P_{Gi} im Innern und die magnetischen Feldstärken B_i und B_a innen und außen die Gleichgewichtsbedingung

$$(24.5) \quad \frac{B_a^2}{8\pi} = \frac{B_i^2}{8\pi} + P_{Gi}$$

erfüllen. Diese Konfiguration stören wir nun durch Einschnüren des Plasmaschlauches. Wie man aus der Abb. 24.3 b ersieht, wird das äußere Magnetfeld an der Stelle der Einschnürung schwächer, da der Abstand der Feldlinien sich vergrößert. Der magnetische Druck von außen verringert sich also, gleichzeitig erhöht sich der magnetische Druck innen. Beide Kräfte wirken der Einschnürung entgegen, es tritt keine Würstchen-Instabilität auf.

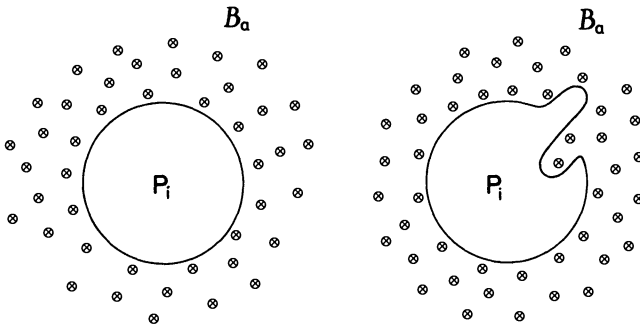


Abb. 24.4 Indifferentes Verhalten eines Plasmazyinders mit innerem Gasdruck und äußerem Magnetfeld (in die Zeichenebene weisend). Gegenüber Störungen welche die Querschnittsfläche des Zylinders nicht ändern und die längs der Achse des Zylinders immer dieselbe Form haben, ist die Konfiguration indifferent.

Dagegen finden wir jetzt eine andere Besonderheit: Wir betrachten den Schlauch von oben und stören ihn so, daß die Querschnittsfläche konstant bleibt. Dann ist die neue Konfiguration wieder im Gleichgewicht, es hat lediglich ein Austausch von Feldlinien stattgefunden (Abb. 24.4). Es liegt indifferentes Gleichgewicht vor.

c) Plasma im Gravitationsfeld auf einem Magnetfeldpolster

Wir wollen nun untersuchen, ob es möglich ist, ein Plasma in einem Gravitationsfeld auf einem Magnetfeldpolster zu halten.

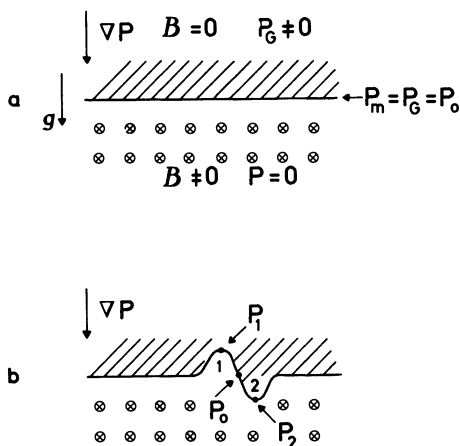


Abb. 24.5 (a) Ein Plasma (schraffiert) ruhe im Schwerfeld auf einem homogenen Magnetfeld, das senkrecht zur Zeichenebene steht.

(b) Die Konfiguration ist instabil gegenüber Störungen der gezeichneten Art.

In einem kartesischen Koordinatensystem sei ein Gravitationsfeld $g = (0, 0, g(z))$ gegeben. Senkrecht dazu, also parallel zur x - y -Ebene, liege ein homogenes Magnetfeld B_0 . Auf dieses Magnetfeld läßt sich ein Plasma so legen, daß Gleichgewicht herrscht (Abb. 24.5 a). Es muß dann an der Grenzschicht die Gleichgewichtsbedingung

$$(24.6) \quad P_G = \frac{1}{8\pi} B_0^2 = P_0$$

gelten. Nun bringen wir eine Störung an, wie in der Abb. 24.5 b gezeichnet. Die beiden Teilflächen 1 und 2 der Zeichenebene mögen gleichen Inhalt haben. Es sei nun P_1 der Gasdruck an der obersten Stelle der Teilfläche 1, P_2 der Gasdruck an der niedrigsten Stelle der Teilfläche 2. Dann gilt $P_1 < P_0 < P_2$, da der Gasdruck nach unten wächst. Da die Störung flächengleich war, ist aber die magnetische Feldstärke überall im Vakuum dieselbe wie vor der Störung. Also gilt

$$(24.7) \quad P_0 = \frac{1}{8\pi} B_0^2, \quad P_1 < \frac{1}{8\pi} B_0^2, \quad P_2 > \frac{1}{8\pi} B_0^2.$$

Aus den ausgebeulten Stellen ist das Gleichgewicht so gestört, daß sich die Störung noch weiter vergrößert. Das Plasma ist instabil. Die Situation ist ähnlich wie am Schluß von Abschnitt b). Hier wie dort werden flächengleiche Störungen angebracht, bei denen Feldlinien und feldfreie Materie ausgetauscht werden. Dabei wird weder gegen den Gasdruck noch gegen den magnetischen Druck Arbeit geleistet. Dort ergab sich indifferentes Gleichgewicht, hier, wo die Schwerkraft hinzukommt, haben wir eine stattliche Instabilität.

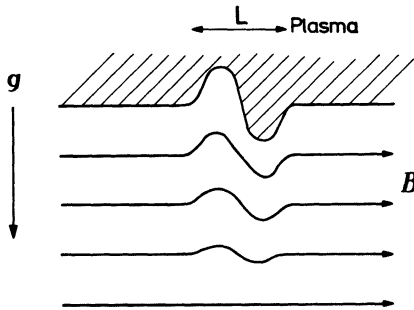


Abb. 24.6 Derselbe Fall wie in Abb. 24.5; jetzt aber mit Störungen, welche die Feldlinien verbiegen. Diese Konfiguration ist stabil gegenüber solchen Störungen hinreichend kleiner Wellenlänge L .

Wir wollen nun die oben betrachtete Konfiguration *in Richtung des Magnetfeldes* stören (Abb. 24.6). Dazu bringen wir an der Trennfläche zwischen Plasma und Feld eine Störung der Ausdehnung L an. Die verbogenen Feldlinien wollen sich verkürzen und wirken daher stabilisierend. Für hinreichend kleine (räumliche) Störungen erhält man Stabilität, da an den gestörten Stellen eine große Änderung der Magnetfeldenergie einer relativ mäßigen Änderung der potentiellen Energie des Plasmas gegenübersteht. Für hinreichend ausgedehnte Störungen dagegen erhält man stets Instabilität: Bei großem L werden bei vorgegebener Stör-Amplitude die Feldlinien nur wenig verbogen, während die Masse des ausgelenkten Plasmas mit L zunimmt. Die Störung der potentiellen Energie überwiegt dann die der magnetischen Energie. Deshalb ist unsere Konfiguration nur räumlich hinreichend kleinen Störungen dieser Art gegenüber stabil.

Will man ein Plasma in einem Gravitationsfeld auf einem Magnetfeldpolster halten, so treten stets Störungen nach Art von Abb. 24.5 und 24.6 auf, wobei insbesondere Störungen der Art von Abb. 24.5 zur Instabilität führen. Man kann eine Verringerung der Instabilität dadurch erreichen, daß man Magnetfelder verschiedener Richtung geeignet aufeinander-schichtet (vgl. Abb. 24.7). Dann müssen bei jeder Ausbeulung der Grenzfläche Feldlinien verlängert werden.

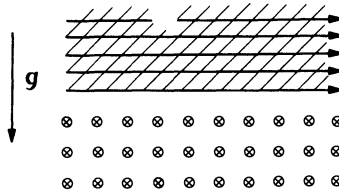


Abb. 24.7 Ein Plasma, auf einem magnetischen Polster liegend, werde selbst von einem homogenen, zum Vakuumfeld senkrecht stehenden Magnetfeld durchsetzt. Jede Art von Störungen der Grenzfläche verbiegt die Feldlinien von mindestens einem der beiden Felder. Die dazu nötige Arbeit stabilisiert Störungen genügend kurzer Wellenlänge.

Alle hier besprochenen Fälle sind stets für irgendwelche Wellentypen instabil. Diese Instabilitäten sind daran schuld, daß es bisher nicht gelungen ist, ein Plasma hoher Temperatur hinreichend lange in einem Magnetfeld freischwebend so zusammenzuhalten, daß die Fusion des Wasserstoffs ablaufen kann. Frank-Kamenezki (1963) klagt darüber: „Gewöhnlich wird das Leben eines Plasmas durch die Instabilität beendet. Diese schreckliche ‚Krankheit‘ ist für das Plasma ebenso gefährlich wie für den Menschen der Krebs oder der Infarkt. Die Bekämpfung der Instabilität ist die wichtigste Aufgabe, vor der die Plasmaphysik heute steht.“

§ 25. Stabilitätstheorie

In diesem und im folgenden Paragraphen wollen wir uns mit dem Stabilitätsproblem weiter befassen. Wir werden uns dabei grundsätzlich auf magnetohydrostatische Probleme beschränken, aber selbst dann ist der Formalismus zum Teil schon ziemlich schwierig.

Um zu studieren, wie sich eine Gleichgewichtskonfiguration bei einer Störung verhält, müssen wir die zeitabhängigen Gleichungen in der Nachbarschaft des Gleichgewichts untersuchen. Wie nehmen unendliche Leitfähigkeit und adiabatische Zustandsänderungen an. Weiterhin sei die Viskosität vernachlässigt ($\nu = 0$), und das Gravitationsfeld verschwinde ($\mathbf{g} = 0$). Dann erhalten wir bei Elimination von \mathbf{j} und \mathbf{E} aus den Gleichungen (16.7) bis (16.13) das System

$$(25.1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$(25.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(25.3) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}),$$

$$(25.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v},$$

$$(25.5) \quad \frac{dP}{dt} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = v_s^2 \frac{d\rho}{dt}; \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right).$$

Die letzte Gleichung ist die Adiabatenbedingung, wir hatten sie schon in § 32 benutzt. Sie definiert den Weg im P - ρ -Diagramm, den ein sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegendes Materieelement beschreibt.

a) Lineare Störungsgleichungen

Zur Untersuchung der zeitabhängigen Gleichungen in der Nachbarschaft der statischen Lösung bringen wir – ähnlich wie bei den Wellenlösungen – kleine, zeitabhängige Störungen an die Größen der Gleichgewichtslösung an. Dabei charakterisiere der Index 0 wieder die statische Lösung und der Index 1 die kleinen Störgrößen. Anschließend werden wieder nur in den Störgrößen lineare Glieder berücksichtigt. Wir setzen:

$$(25.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t), \\ P &= P_0(\mathbf{r}) + P_1(\mathbf{r}, t), \\ \rho &= \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtslösung erfüllt dabei die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla P_0 &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_0), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, \\ P_0 &= P_0(\rho_0, T_0). \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Gleichung die Zustandsgleichung.

Gehen wir mit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ und den analogen Ausdrücken der übrigen Größen in die Gleichungen (25.1) bis (25.5) ein, so erhalten wir bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung

$$(25.7) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0),$$

$$(25.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0,$$

$$(25.9) \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_1 \times (\nabla \times \mathbf{B}_0),$$

$$(25.10) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v}_1,$$

$$(25.11) \quad \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) P_0 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 \right).$$

Wir fassen dieses Gleichungssystem durch Elimination der Größen P_1 und \mathbf{B}_1 zu einer einzigen Gleichung in \mathbf{v}_1 zusammen. Dazu differenzieren wir Gl.

(25.9) nach t :

$$(25.12) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0).$$

Nun gilt wegen der Identität $\nabla \cdot (\mathbf{A}) \equiv \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \varphi$ und der Kontinuitätsgleichung (25.10)

$$(25.13) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 = -\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (25.11)

$$(25.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) P_0 + \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 \right) \\ &= -(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) P_0 - \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Setzen wir das zusammen mit Gl. (25.7) in Gl. (25.12) ein, so ergibt sich folgende Differentialgleichung für \mathbf{v}_1 , in der sonst nur noch ungestörte Größen auftreten:

$$(25.15) \quad \begin{aligned} -\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} &= -\nabla [(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1] + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)] \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \{ \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)] \}. \end{aligned}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung in \mathbf{v}_1 . Wir können sie in der Form

$$(25.16) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = \mathbf{L}(\mathbf{v}_1)$$

schreiben, wobei $\mathbf{L}(\mathbf{v}_1)$ ein reeller, linearer Differentialoperator ist, dessen Koeffizienten von den ungestörten Größen abhängen.

Für das im nächsten Paragraphen behandelte Energieprinzip erweist sich noch eine andere Formulierung der Differentialgleichung als zweckmäßig. Dazu betrachten wir eine kleine Verschiebung \mathbf{x} . Es sei \mathbf{r}_0 der Ortsvektor eines Teilchens. Wenn jetzt die Störung \mathbf{x} angebracht wird, dann sei der neue Ort gegeben durch

$$(25.17) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{x}$$

mit $\partial \mathbf{x} / \partial t = \mathbf{v}_1$. Setzen wir die letzte Beziehung in Gl. (25.16) ein und integrieren einmal nach der Zeit, so folgt

$$(25.18) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \mathbf{L}(\mathbf{x}) + \text{const.}$$

Die Integrationskonstante können wir gleich Null setzen; das sieht man, wenn man das System Gl. (25.1) bis (25.5) betrachtet: Gehen wir dort mit $\partial \mathbf{x} / \partial t$ statt mit \mathbf{v} in die erste Gleichung, so erhält man

$$(25.19) \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right)$$

Dieser Ausdruck werde nach der Zeit integriert. Die dabei auftretende Integrationskonstante verschwindet, da die Störung im Magnetfeld verschwinden muß, wenn die Verschiebung identisch Null ist. So kann man mit allen Störgleichungen verfahren, ohne daß eine neue Integrationskonstante auftritt. Die gleiche Prozedur, die früher auf Gl. (25.16) führte, liefert jetzt die analoge Beziehung

$$(25.20) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \mathbf{L}(\mathbf{x}).$$

Wir kehren jetzt wieder zur Gl. (25.16) zurück. Da die Zeit in den Koeffizienten nicht explizit auftritt und es in dieser linearen Differentialgleichung keine gemischten räumlichen und zeitlichen Ableitungen gibt, kann man sie durch einen Exponentialansatz in der Zeit

$$(25.21) \quad \mathbf{v}_1 = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \cdot \exp(i\omega t)$$

lösen. Gehen wir mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (25.16) ein, so erhalten wir wegen $\partial/\partial t = i\omega$

$$(25.22) \quad -\rho_0 \omega^2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{L}(\mathbf{v}_1).$$

Ebenso folgt aus Gl. (25.20) mit einem entsprechenden Ansatz für die Verschiebung \mathbf{x}

$$(25.23) \quad -\rho_0 \omega^2 \mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{x}).$$

Zusammen mit den noch anzugebenden Randbedingungen haben wir damit für jede statische Gleichgewichtslösung ein Eigenwertproblem für den Eigenwert ω^2 vorliegen. Kennt man ω , so kann man gemäß dem obigen Ansatz (25.21) entscheiden, wie das zeitliche Verhalten einer Störung dieser Lösung ist. Die Bestimmung von ω ist jedoch im allgemeinen ein verhältnismäßig schwieriges und aufwendiges Problem.

b) Randbedingungen

Eigenwerte ω^2 von Gl. (25.22) können nur bestimmt werden, wenn die Randbedingungen festgelegt sind.

Das einfachste ist es, das Plasma in ein starres Gefäß einzuschließen, etwa in einen starren, unendlich guten Leiter. An der Wand kann das Plasma nur tangential strömen, und wegen der guten Leitfähigkeit des Wandmaterials darf sich auch der magnetische Fluß durch jeden Quadratzentimeter der Wandfläche nicht ändern. Außerdem darf das elektrische Feld keine Tangentialkomponente haben, da E im äußeren Leiter gleich Null ist und die Tangentialkomponente von E stetig vom Plasma in den Leiter übergehen muß. Dementsprechend hat man dort als Randbedingungen (\mathbf{n} sei der Normalenvektor der Wand)

$$(25.24) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0.$$

Aber das so definierte Randwertproblem hat keine praktische Bedeutung. Wenn Plasma und Wand direkt aneinander grenzen, dann kühlt sich das Plasma ab, und die Wand wird sich aufheizen. Folglich wird das Plasma bald kein Plasma mehr sein, und die Wand kann auch nicht mehr starr bleiben.

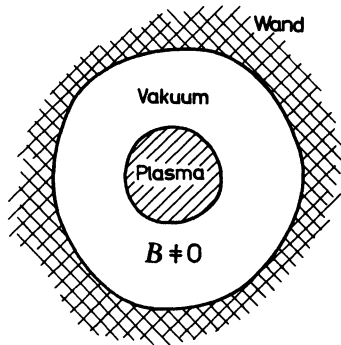


Abb. 25.1 Konfiguration für ein Plasma, das von einem Magnetfeld im Vakuum freischwebend gehalten wird. Das Magnetfeld selbst wird durch eine unendlich gut leitende Wand begrenzt.

Anders ist es dagegen, wenn man zwischen Wand und Plasma ein trennendes Vakuum legt. Dann hat man eine Konfiguration, wie sie schematisch in Abb. 25.1 dargestellt ist. Das Plasma ist von einem Vakuumfeld umgeben, das seinerseits in einem starren Leiter verankert ist. Diese Art von Randwertproblem wurde vor allem im Zusammenhang mit den Versuchen zur Konstruktion eines Fusionsreaktors ausgiebig untersucht (Hain, Lüst, Schlüter 1957; Bernstein, Frieman, Kruskal, Kulrud 1958). Dann hat man einerseits für das Vakuumfeld Randbedingungen an der Wand zu erfüllen, zum anderen hat man die Bedingungen an der Grenzfläche zwischen Vakuumfeld und Plasma. Wir wollen hier die Randbedingungen nicht weiter diskutieren, der Leser sei neben der bereits angegebenen Originalliteratur auf das Buch von Stix (1962) hingewiesen, ferner auf Chandrasekhar (1961).

c) Selbstadjungiertheit

Glücklicherweise hat unsere Differentialgleichung zusammen mit den in b) erwähnten Randbedingungen eine Eigenschaft, die dem Plasmaphysiker das Leben sehr erleichtert. Man kann zeigen, daß das Problem *selbstadjungiert* ist, d.h. für zwei Lösungen \mathbf{u} und \mathbf{v} des Eigenwertproblems (definiert für das Volumen V) gilt

$$(25.25) \quad \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{v}) \, dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u}) \, dV.$$

Den Beweis dafür wollen wir hier nicht bringen (vgl. Hain, Lüst, Schlüter 1957; Bernstein, Frieman, Kruskal, Kulrud 1958), wohl aber wollen wir Folgerun-

gen aus Gl. (25.25) ziehen. Aus der Selbstadjungiertheit folgen nämlich unmittelbar Aussagen über die Eigenwerte und Eigenfunktionen:

1. Selbstadjungierte Probleme haben reelle Eigenwerte. Das ist sehr einfach einzusehen: Mit der im allgemeinen Fall komplexen Eigenfunktion \mathbf{u} zum Eigenwert ω^2 ist auch die zu \mathbf{u} konjugiert komplexe Funktion \mathbf{u}^* Eigenfunktion, sie gehört zum Eigenwert ω^{2*} . Es gilt also

$$(25.26) \quad 0 = \int_V \mathbf{u} \mathbf{L}(\mathbf{u}^*) dV - \int_V \mathbf{u}^* \mathbf{L}(\mathbf{u}) dV = (\omega^{2*} - \omega^2) \int_V \mathbf{u} \mathbf{u}^* \rho_0 dV.$$

Da das Integral rechts im allgemeinen nicht verschwindet, ist $\omega^2 = \omega^{2*}$, also ist ω^2 reell. Damit können wir wegen Gl. (25.22) auch die Eigenfunktionen als reell annehmen.

2. Lösungen $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k$, die zu verschiedenen Eigenwerten ω_i^2, ω_k^2 gehören, sind *orthogonal*:

$$(25.27) \quad \int_V \mathbf{u}_i \mathbf{u}_k \rho_0 dV = 0 \quad \text{für } i \neq k.$$

Es gilt nämlich

$$(25.28) \quad 0 = \int_V [\mathbf{u}_i \mathbf{L}(\mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k \mathbf{L}(\mathbf{u}_i)] dV = (\omega_k^2 - \omega_i^2) \int_V \mathbf{u}_i \mathbf{u}_k \rho_0 dV,$$

woraus Gl. (25.27) folgt. Durch Multiplizieren der Eigenfunktionen mit geeigneten Faktoren kann man erreichen, daß das System der Eigenfunktionen *orthonormal* ist:

$$(25.29) \quad \int_V \mathbf{u}_i \mathbf{u}_k \rho_0 dV = \delta_{ik}.$$

Die aus der Selbstadjungiertheit folgenden Eigenschaften gestatten – ähnlich wie in der Theorie der Fourier-Reihen – ein im Volumen vorgegebenes Vektorfeld nach Eigenfunktionen unseres Problems zu entwickeln. So kann man etwa eine zur Zeit $t = 0$ vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung \mathbf{v}_0 in der Form

$$(25.30) \quad \mathbf{v}_0 = \sum_k c_k \mathbf{u}_k, \quad c_k = \int_V \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_k \rho_0 dV$$

darstellen. Das reelle Vektorfeld

$$(25.31) \quad \mathbf{v} = \sum_k \frac{1}{2} c_k [\exp(i\omega_k t) + \exp(-i\omega_k t)] \mathbf{u}_k$$

$$= \sum_k c_k \cos(\omega_k t) \mathbf{u}_k$$

ist dann eine Lösung der Gleichung (25.22), die zu jedem Zeitpunkt die Randbedingungen erfüllt, und es ist

$$(25.32) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0.$$

Mit Hilfe der orthonormalen Eigenfunktionen können wir das Anfangswertproblem lösen, können also herausfinden, wie sich ein anfangs vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_0 im Laufe der Zeit entwickelt.

Wir gehen jetzt zum Stabilitätsproblem zurück. Eine Konfiguration ist stabil, wenn eine beliebige Störung nicht mit der Zeit beliebig anwächst. Die beliebige Störung sei zur Zeit $t = 0$ durch das Geschwindigkeitsfeld (25.30) beschrieben. Gl. (25.31) beschreibt dann die zeitliche Entwicklung dieser Lösung. Die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung wachsen genau dann nicht mit der Zeit an, wenn alle ω_k reell, d.h., wenn alle $\omega_k^2 > 0$ sind. Wenn auch nur ein $\omega_k^2 < 0$ ist, dann wird der Anteil der Störung, der zu diesem Eigenwert gehört, mit der Zeit beliebig anwachsen.

Für die Stabilität ist also *notwendig* und *hinreichend*, daß alle $\omega_k^2 > 0$ sind.

§ 26. Das Energieprinzip

Wir denken uns eine Kugel, die sich im tiefsten Punkt einer nach oben konkaven Unterlage im stabilen Gleichgewicht befindet. Wenn man sie aus dieser Gleichgewichtslage auslenkt, rollt sie zurück und führt (im reibungslosen Fall) eine Oszillation um die Ruhelage aus. Wenn K die kinetische und W die potentielle Energie der Kugel ist, gilt während dieser Oszillation $K + W = \text{const.}$ Eine Auslenkung δx der Kugel hat eine Änderung $\delta W > 0$ der potentiellen Energie zur Folge. Wenn man also die Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage herausbringt, indem man ihr einen kleinen Betrag kinetischer Energie zuführt, so muß sie während der Bewegung diese kinetische Energie in potentielle umwandeln, bis sie zur Ruhe kommt. Die Kugel entfernt sich also im Laufe der Zeit nicht beliebig weit von der Ausgangslage, das Gleichgewicht

ist stabil. Das beruht darauf, daß die potentielle Energie in der betrachteten Ruhelage ein Minimum hat. Ähnlich wie man in diesem einfachen mechanischen Beispiel sehen kann, daß Stabilität gleichwertig ist mit dem Zustand niedrigster potentieller Energie, so läßt sich auch für unsere magnetohydrostatischen Konfigurationen eine potentielle Energie definieren, die im Fall von Stabilität ein Minimum hat.

Mit dem in § 25 eingeführten selbstadjungierten Operator L hatten wir auch die Differentialgleichung

$$(26.1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = L(\mathbf{x})$$

erhalten. In analoger Weise wie bei den früher gewonnenen Eigenfunktionen \mathbf{v}_n lassen sich entsprechend auch Eigenfunktionen \mathbf{x}_n gewinnen. Sie haben natürlich gleichfalls alle die schönen Eigenschaften wie die \mathbf{v}_n , sie sind also zum Beispiel nach geeigneter Multiplikation mit einem Faktor orthonormiert. Es gilt

$$(26.2) \quad -\rho_0 \omega_n^2 \mathbf{x}_n = L(\mathbf{x}_n).$$

Wir wollen nun nachsehen, wie sich magnetische, kinetische und innere Energie verhalten, wenn man an der Konfiguration die Störung \mathbf{x} anbringt. Dazu denken wir uns als Gleichgewichtskonfiguration ein Plasma, das mit einem Magnetfeld im umgebenden Vakuum im Gleichgewicht steht. Das Außenfeld wiederum sei von einem unendlich guten starren Leiter eingeschlossen. Wir haben also eine Konfiguration wie in Abb. 25.1 vorliegen.

Die Zustandsgleichung des Plasmas sei die eines idealen Gases. Ist \mathfrak{R} die Gaskonstante und μ das mittlere Molekulargewicht im Plasma, dann folgt wegen $\mathfrak{R}/\mu = c_P - c_V$ für die Dichte der inneren Energie

$$(26.3) \quad u = c_V \rho T = \frac{c_V \mu}{\mathfrak{R}} P_G = \frac{c_V}{c_P - c_V} P_G = \frac{1}{\gamma - 1} P_G$$

$$(\gamma = c_P/c_V).$$

Den Gleichgewichtszustand bezeichnen wir wieder mit dem Index $_0$. Die Gesamtenergie unserer Konfiguration wird nun

$$(26.4) \quad U_0 = \int_V \left(\frac{1}{\gamma - 1} P_{G_0} + \frac{1}{8\pi} B_0^2 \right) dV.$$

Hierbei ist die Integration über das ganze Volumen einschließlich des das Plasma umgebenden Vakuums auszuführen. Wenn das Plasma durch die Störung

in Bewegung kommt, dann ändern sich die Beiträge von innerer und magnetischer Energie, außerdem kommt noch die kinetische Energie

$$(26.5) \quad K = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \approx \frac{1}{2} \int_V \rho_0 v^2 dV$$

zur Gesamtenergie hinzu. Dabei haben wir rechts Größen fortgelassen, die in der Störung von dritter Ordnung sind. Wir haben in Gl. (26.5) die Integration über das ganze Volumen V ausgeführt; natürlich trägt das Vakuum hier nichts bei. Wie immer sich aber auch die einzelnen Beiträge ändern mögen, die Gesamtenergie selbst bleibt konstant, da das Vakuum von einem unendlich guten Leiter umgeben ist, so daß dem System keine Energie verloren gehen kann. Zu einem beliebigen Zeitpunkt ist die Gesamtenergie U gegeben durch

$$(26.6) \quad U = \int_V \left(\frac{1}{\gamma-1} P_G + \frac{1}{8\pi} B^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right) dV.$$

Wir definieren nun als die *potentielle Energie* der Konfiguration die Größe

$$(26.7) \quad W = \int_V \left(\frac{1}{\gamma-1} P_G + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) dV.$$

Es ist dann $W_0 = U_0$; in der Ruhelage ist die potentielle Energie gleich der Gesamtenergie. Wir setzen

$$(26.8) \quad W = W_0 + \delta W.$$

Dabei ist δW die durch die Störung verursachte Änderung der potentiellen Energie. Im Folgenden wollen wir diese Änderung näher bestimmen.

Aus der Konstanz der Gesamtenergie U folgt

$$(26.9) \quad \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (W_0 + \delta W + K) = \frac{d}{dt} (\delta W + K) = 0.$$

Es ist nun wegen Gl. (26.5) und (26.1)

$$(26.10) \quad \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 v^2 dV = \int_V \rho_0 \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \rho_0 \mathbf{v} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} dV = \\ &= \int_V \mathbf{v} \mathbf{L}(\mathbf{x}) dV. \end{aligned}$$

Da L selbstadjungiert ist, folgt wegen Gl. (26.9)

$$(26.11) \quad \begin{aligned} -\frac{d}{dt}(\delta W) &= \frac{dK}{dt} = \int_V \mathbf{v} L(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \left(\int_V \mathbf{v} L(\mathbf{x}) dV + \int_V \mathbf{x} L(\mathbf{v}) dV \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} L(\mathbf{x}) dV, \end{aligned}$$

und Integration über die Zeit liefert

$$(26.12) \quad \delta W = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{x} L(\mathbf{x}) dV.$$

Die Integrationskonstante verschwindet hier, da bei $\delta W = 0$ auch $\mathbf{x} = 0$ ist. Jetzt kann man zeigen, daß Stabilität gleichwertig damit ist, daß W ein Minimum hat. Wir denken uns eine beliebige Störung \mathbf{x} nach den Eigenfunktionen \mathbf{x}_n von L entwickelt, die ein orthonormiertes Funktionensystem bilden:

$$(26.13) \quad \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{x}_n.$$

Dabei gilt für jede Eigenfunktion die Gl. (26.2); die a_n sind reelle Entwicklungskoeffizienten.

Setzen wir \mathbf{x} in Gl. (26.12) ein, so wird daraus wegen der Orthogonalität

$$(26.14) \quad \begin{aligned} -2\delta W &= -\sum_{m,n}^{\infty} \int_V a_n \mathbf{x}_n \rho_0 \omega_m^2 a_m \mathbf{x}_m dV \\ &= -\sum_{m,n}^{\infty} a_n a_m \omega_m^2 \int_V \rho_0 \mathbf{x}_n \mathbf{x}_m dV \\ &= -\sum_{m,n}^{\infty} a_n a_m \omega_m^2 \delta_{mn} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Beziehung

$$(26.15) \quad \delta W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n^2.$$

Daraus ersehen wir, daß bei einer stabilen, magnetohydrostatischen Gleichgewichtskonfiguration, also wenn alle ω_n^2 positiv sind, die Bedingung

$$(26.16) \quad \delta W > 0$$

gilt. Die potentielle Energie W hat also bei stabilen Konfigurationen ein Minimum. Das ist das *Energieprinzip*.

Die Bedingung (26.16) ist auch hinreichend für Stabilität. Wenn sie erfüllt ist, dann gilt $\omega_n^2 > 0$ für alle Eigenwerte. Gäbe es nämlich einen Eigenwert ω_{n^*} mit $\omega_{n^*}^2 < 0$, dann könnte man immer eine Störung so wählen, daß alle a_n verschwinden mit Ausnahme von a_{n^*} , und dann wäre $\delta W = a_{n^*}^2 \omega_{n^*}^2 < 0$.

Kapitel V

MAGNETFELDER IN ROTIERENDEN STERNEN

Wir haben schon in § 11 erwähnt, daß in den magnetisch veränderlichen Sternen möglicherweise eingefrorene Felder, die an der Rotation der Sterne teilnehmen, für die beobachteten Erscheinungen verantwortlich sind. So liegt der Gedanke nahe, Modelle für solche Felder zu konstruieren. Dabei stößt man auf eine Reihe neuer Probleme.

Schon ohne Rotation gibt ein in einem Stern eingefrorenes Magnetfeld Komplikationen, denn seine Kraftwirkung beeinflußt den Sternaufbau. Die magnetische Kraftwirkung ist nicht sphärisch-symmetrisch. Auf nichtsphärisch-symmetrische Störkräfte reagieren Sterne besonders eigenartig. Das kennt man aus der Theorie rotierender Sterne oder von Sternen, die unter dem Einfluß von Gezeitenkräften stehen. Wirken auf einen Stern nichtsphärisch-symmetrische Kräfte, dann entstehen im Stern Zirkulationsbewegungen (wegen eines allgemeinen Beweises siehe etwa Kippenhahn 1963). Solche thermisch getriebenen Zirkulationen muß man auch erwarten, wenn in einem Stern ein Magnetfeld mit der Sternmaterie im magnetohydrostatischen Gleichgewicht steht. Die Zirkulationsbewegungen, die meist eine recht komplizierte topologische Struktur haben, verbiegen selbst wieder die Feldlinien, und das ganze Problem wird noch schwieriger. Glücklicherweise sind die so hervorgerufenen Zirkulationsbewegungen bei nicht zu starken Feldstärken sehr langsam, so daß man sie in erster Näherung vergessen kann.

Ein weiteres Problem tritt auf, wenn die Feldlinien des im rotierenden Stern eingefrorenen Magnetfeldes durch die Oberfläche des Sterns in den Außenraum dringen. Sie müssen dann auch dort an der Rotation teilnehmen. Da der Außenraum nicht leer ist, sondern von zirkumstellarer oder interstellarer Materie erfüllt ist, wird die Materie in der Umgebung von den Feldlinien gezwungen, an der Rotation des Sterns teilzunehmen. Dabei wird Drehimpuls auf das umgebende Plasma übertragen, dieser Drehimpuls wird dem Stern vom Magnetfeld entzogen. Wir werden später sehen, daß Magnetfelder auf diese Weise die Rotation eines Sterns sehr effektiv bremsen können.

Wir werden in diesem Kapitel einige der Probleme herausgreifen, die auftreten, wenn Magnetfelder in einem rotierenden Plasmakörper eingefroren sind.

§ 27. Isorotation

Wenn ein Magnetfeld in einem starr rotierenden Stern eingefroren ist, dann nimmt es an der Rotationsbewegung teil. Bei starrer Rotation ist alles noch verhältnismäßig einfach: Die ganze Feldkonfiguration rotiert starr mit.

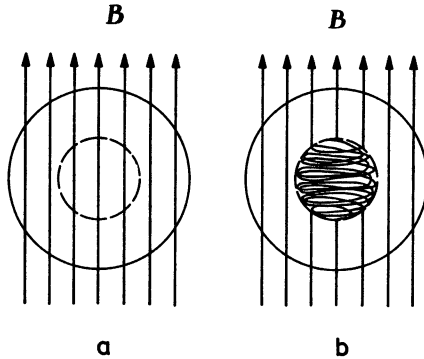


Abb. 27.1 (a) Ein homogenes Feld in einem Stern, dessen innerer Kern rasch, dessen Außenhülle langsam rotiert (schematisch).
 (b) Wenn das Feld nicht zu stark ist, werden die Feldlinien aufgewickelt, die die Grenzfläche zwischen Kern und Hülle durchdringen.

Wenn ein Stern differentiell, also nicht starr rotiert, dann werden Feldlinien, die nicht rein toroidal ausgerichtet sind, durch die Rotationsbewegung aufgewickelt. Dabei geht Rotationsenergie in magnetische Feldenergie über, so lange, bis die immer stärker werdende magnetische Kraft die Rotationsbewegung beeinflusst. Man denke sich zur Veranschaulichung den Fall eines Sterns, dessen Außenschichten sehr langsam oder gar nicht rotieren, während sein Innengebiet in der Nähe des Zentrums sehr rasch rotieren möge. Zu Beginn sei ein schwaches, homogenes Feld vorhanden (vgl. Abb. 27.1 a), das parallel zur Rotationsachse laufen möge. Da das Feld schwach ist, wird es im Gebiet des rotierenden Kerns aufgewickelt, während es außen nahezu unverändert bleibt. Dabei steigt die Feldstärke im Übergangsbereich an, ein immer stärker werdendes magnetisches Drehmoment versucht, den Kern abzubremesen und gleichzeitig Teilen der nichtrotierenden Hülle eine stärkere Drehbewegung aufzuzwingen (Abb. 27.1 b). Das Magnetfeld versucht also, die Unterschiede in der Winkelgeschwindigkeit zu verringern, es wehrt sich gegen die differentielle Rotation. (Einige einfache Abschätzungen über die Zeitskalen, die mit diesem Vorgang verknüpft sind, findet man bei Fricke, Kippenhahn 1972.)

Also sollte man glauben, daß der stationäre Zustand im rotierenden Stern erst erreicht ist, wenn die Rotation starr ist und wenn alle Feldlinien meridio-

nal sind (den trivialen Fall, daß alle Feldlinien rein toroidal sind, schließen wir hier aus). Die starre Rotation ist aber nur eine spezielle Lösung. Ferraro (1937) hat eine allgemeinere Klasse von Rotationsgesetzen gefunden, bei denen Rotation und Magnetfeld in einem stationären Zustand miteinander verträglich sind. Diese Rotationsgesetze wollen wir jetzt betrachten:

Gegeben sei ein rotierender Plasmakörper mit einem eingefrorenen Magnetfeld, die Leitfähigkeit sei unendlich. Dann folgt aus Gl. (10.13)

$$(27.1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

In Zylinderkoordinaten s, φ, z hat man

$$(27.2) \quad \mathbf{B} = (B_s, B_\varphi, B_z),$$

$$(27.3) \quad \mathbf{v} = (0, s\Omega, 0),$$

dabei ist $\Omega = \Omega(s, z)$ die (ortsabhängige) Winkelgeschwindigkeit. Eine stationäre Lösung muß die Gleichung $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ befriedigen. Nun gilt in Zylinderkoordinaten

$$(27.4) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (s \Omega B_z, 0, -s \Omega B_s)$$

und

$$(27.5) \quad \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (0, \frac{\partial}{\partial z} (s \Omega B_z) + \frac{\partial}{\partial s} (s \Omega B_s), 0).$$

Dabei haben wir Axialsymmetrie ($\partial/\partial\varphi = 0$) angenommen. Als Bedingung dafür, daß auch die φ -Komponente in Gl. (27.5) verschwindet, findet man

$$(27.6) \quad s\Omega \frac{\partial B_z}{\partial z} + s B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \Omega B_s + s\Omega \frac{\partial B_s}{\partial s} + s B_s \frac{\partial \Omega}{\partial s} = s(B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + B_s \frac{\partial \Omega}{\partial s}) = 0.$$

Dabei haben wir benutzt, daß wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$(27.7) \quad s\Omega \nabla \cdot \mathbf{B} = \Omega \frac{\partial}{\partial s} (s B_s) + s\Omega \frac{\partial B_z}{\partial z} = \Omega B_s + s\Omega \frac{\partial B_s}{\partial s} + s\Omega \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

gilt. Gl. (27.6) läßt sich in der Form

$$(27.8) \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \Omega = 0$$

schreiben. Die Vektoren \mathbf{B} und $\nabla \Omega$ stehen also senkrecht aufeinander. Das bedeutet, daß sich Ω längs einer Feldlinie nicht ändern kann; jede Feldlinie rotiert starr – aber nicht alle Feldlinien müssen – wie bei der starren Rotation – mit *derselben* Winkelgeschwindigkeit rotieren.

Eine weitere notwendige Bedingung für den stationären Zustand ist, daß $B_\varphi = 0$ ist. Die Feldlinien müssen also in der Meridianebene liegen. Wäre das nicht der Fall, dann hätte man eine Kraftwirkung in φ -Richtung, die durch keine andere Kraft kompensiert würde – man hätte also keinen stationären Zustand. Zu jeder Feldlinie in der Meridianebene gehört die Gesamtheit aller Feldlinien, die durch Rotation in φ -Richtung aus ihr hervorgehen. Alle diese Feldlinien bilden eine axialsymmetrische magnetische Fläche. Die Bedingung, die wir oben herleiteten, besagt, daß jede derartige magnetische Fläche starr rotiert, daß aber beim Übergang von einer Fläche zur anderen die Winkelgeschwindigkeit variieren kann. Diese Verallgemeinerung der starren Rotation nennt man *Isorotation*.

§ 28. Drehimpulsverlust durch stellaren Wind

Es spricht viel dafür, daß ein Stern im Laufe seines Lebens Drehimpuls verliert. Zum einen bekommt er bei seiner Entstehung so viel Drehimpuls mit, daß es überhaupt schwer vorstellbar ist, wie sich daraus ein angenähert kugelförmiges Gebilde formen kann, zum anderen zeigen wasserstoffbrennende Sterne eine Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit mit dem Alter (Kraft 1967, Skumanich 1972). Die heute allgemein akzeptierte Erklärung dafür wurde von Schatzman (1954) gegeben. Danach geschieht die Bremsung der rotierenden Sterne durch die Wechselwirkung eines Magnetfeldes mit vom Stern abströmender Materie. Wir diskutieren einige der dabei auftretenden Probleme hier und im nächsten Paragraphen.

a) Das Drehimpulsproblem bei der Bildung der Sterne

Ein Stern bilde sich durch Kontraktion aus einer interstellaren Gaswolke, ihre Winkelgeschwindigkeit sei Ω_0 . ρ_0 sei die mittlere Dichte im interstellaren Medium und R_0 der Anfangsradius der Wolke. Die Gesamtmasse der als homogen und sphärisch symmetrisch angenommenen Wolke sei M . Weiterhin nehmen wir an, daß während der ganzen Kontraktionsphase die Konfiguration sphärisch-symmetrisch und homogen bleibe; ihr Radius sei R . Diese Annahme ist sicher nicht richtig, denn das Gebilde wird sich mehr und mehr abplatteten – es geht uns aber hier nur um eine grobe Abschätzung.

Wenn jetzt während der Kontraktion der Drehimpuls J erhalten bleibt, gilt

$$(28.1) \quad J_{\text{Wolke}} = \frac{2}{5} M R_0^2 \Omega_0 = K M R^2 \Omega.$$

Dabei ist die Konstante K durch die Dichtekonzentration zum Zentrum hin bestimmt. Für homogene, sphärisch-symmetrische Gebilde wie die anfängliche Wolke gilt $K = 2/5$. (Für die meisten Sterne ist $K \approx 1/13$ eine gute Näherung.) Da wir annehmen, daß das Gebilde homogen bleibt, behält K während der Kontraktion seinen Wert. Dann folgt aus Gl. (28.1)

$$(28.2) \quad \frac{R}{R_0} = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{1/2},$$

also

$$(28.3) \quad \Omega = \Omega_0 \frac{R_0^2}{R^2} \sim \frac{1}{R^2}.$$

Während der Kontraktion muß also die Winkelgeschwindigkeit des sich bildenden Sternes stark zunehmen. Sie kann aber nicht beliebig groß werden, denn bei einem kritischen $\Omega = \Omega_{\text{max}}$ löst sich durch die Zentrifugalkraft Materie vom Äquator des Sternes ab. In diesem kritischen Gleichgewichtszustand ist die Fliehkraft am Äquator gleich der Schwerkraft, also

$$(28.4) \quad R \Omega_{\text{max}}^2 = \frac{GM}{R^2},$$

dabei ist G die Gravitationskonstante. Daraus ergibt sich

$$(28.5) \quad \Omega_{\text{max}} \sim \frac{1}{R^{3/2}}.$$

In Abb. 28.1 sind Ω und Ω_{max} in Abhängigkeit vom Radius während der Kontraktion aufgetragen.

Während seiner Kontraktion bewegt sich der Stern auf der Ω -Kurve nach links; wenn sein Bildpunkt über die Ω_{max} -Kurve geht, kann der Stern nicht mehr im Gleichgewicht bleiben, es löst sich Materie ab.

Aus Gl. (28.4) folgt

$$(28.6) \quad \Omega_{\text{max}}^2 = \frac{GM}{R^3} = \text{const. } \rho,$$

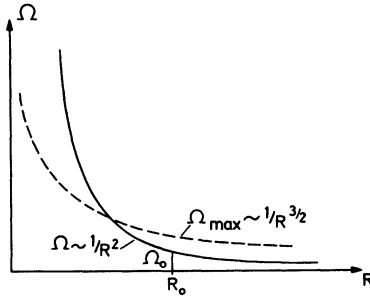


Abb. 28.1 Die Winkelgeschwindigkeit Ω eines Sterns, dessen Radius sich ändert. Die durchgezogene Kurve gibt die Winkelgeschwindigkeit während der Radiusänderung bei festgehaltenem Drehimpuls. Die gestrichelte Kurve gibt die maximale Winkelgeschwindigkeit am Äquator in Abhängigkeit vom Radius.

wobei ρ die mittlere Dichte des rotierenden Gebildes ist. Die maximale Winkelgeschwindigkeit ist also nur von der mittleren Dichte, nicht von der Größe des Gebildes abhängig. Kombiniert man Gl. (28.2), (28.4) und (28.6), so folgt mit $M = 4\pi R_0^3 \rho_0/3$ die Beziehung

$$(28.7) \quad \left(\frac{\Omega}{\Omega_{\max}} \right)^2 = \frac{3 \Omega_0^2}{4\pi G \rho_0} \frac{R_0}{R}.$$

Setzen wir für Ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Galaxis $\Omega_0 = 10^{-15} \text{ sec}^{-1}$ und $\rho_0 = 10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$ ein, so folgt, daß sich der Radius nur um den Faktor 0.36 verkleinern kann, bis Fliehkraft gleich Schwerkraft wird.

Wie schon mehrmals betont, haben wir nur eine sehr grobe Abschätzung gemacht. In Wahrheit löst sich nicht einfach Materie am Äquator ab; statt dessen entsteht eine stark abgeplattete Scheibe, die dann wahrscheinlich instabil wird und in Teilmassen zerfällt. Aber wie auch immer die wirklichen Vorgänge sind, unsere Abschätzung zeigt, daß bei den entstehenden Sternen die Fliehkraft eine mit der Schwerkraft vergleichbare Rolle spielen müßte.

Selbst wenn sich Sterne nur aus Materie bilden, die infolge der turbulenten Bewegung des interstellaren Gases zufällig gerade einen geringen Drehimpuls besitzt – schon nach kurzer Zeit muß der zukünftige Stern so rasch rotieren, daß an seinem Äquator die Fliehkraft der Schwerkraft die Waage hält. So müßten wir erwarten, daß alle Sterne so rasch rotieren, wie es nur möglich ist. Das ist aber nicht der Fall. Die Sonne rotiert zum Beispiel so langsam, daß man sich heute noch darüber streitet, ob sie eine Spur von Abplattung zeigt oder nicht. Offenbar hat sie also während ihrer Geschichte fast allen ihren Drehimpuls verloren: die heutige Rotationsperiode der Sonne beträgt

$T = 2\pi/\Omega \approx 27^d = 2.33 \times 10^6$ sec, dagegen ist ihre kritische Rotationsperiode, bei der die Äquatorzone sich gerade noch im Gleichgewicht befände $T_{\max} = 2\pi/\Omega_{\max} \approx 10^4$ sec. Wie können die Sterne während ihrer Kontraktion Drehimpuls verlieren?

b) Massenverlust eines Sterns mit Magnetfeld

Nehmen wir der Einfachheit halber an, ein Stern rotiere wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . Er habe ein dipolartiges Magnetfeld, das symmetrisch zu seiner Rotationsachse und zu seiner Äquatorebene liegen möge. Von der Oberfläche dieses Sterns möge Materie in den Raum strömen. Es soll uns hier nicht interessieren, durch welchen Mechanismus die Materie gegen die Schwerkraft nach außen geschoben wird, wir nehmen den Massenverlust dM/dt des Sterns hier einfach als gegeben an. Die Sonne beispielsweise verliert durch den Sonnenwind etwa 1.4×10^{12} g pro Jahr. Es gibt Sterne mit wesentlich größerem Massenverlust: Die veränderlichen Sterne vom Typ T Tauri verlieren pro Jahr einige 10^{27} g.

Wie sieht es nun mit der Wechselwirkung des Magnetfeldes mit dem ausströmenden Sternwind aus? Ohne Magnetfeld würde die ausströmende Materie, die an der Oberfläche die gleiche Winkelgeschwindigkeit Ω hat wie der Stern selbst, nach außen hin ihren Drehimpuls beibehalten, und ihre Winkelgeschwindigkeit würde sich wie $1/r^2$ verringern. Wenn aber ein Magnetfeld vorhanden ist (das im Stern eingefroren ist und mit ihm mitrotiert), dann wird es die ausströmende Materie zwingen, die Winkelgeschwindigkeit Ω beizubehalten. Das Magnetfeld wird also Drehimpuls an die ausströmende Materie liefern. Diesen Drehimpuls erhält das Magnetfeld von dem Stern, in dem es verankert ist. Waren anfangs die Feldlinien rein meridional, so verbiegt die ausströmende Materie die Feldlinien in der Rotation entgegengesetzten Sinne. Die Feldlinien treten dann nicht mehr radial aus, sie haben einen Knick an der Oberfläche (Abb. 28.2). Dann aber folgt eine tangentielle Kraft auf die Unstetigkeitsfläche (vgl. § 17), da die Feldlinien das Bestreben haben, sich gerade zu richten. Sie üben daher ein Drehmoment auf den Stern aus, der damit in seiner Rotation verlangsamt wird.

Das Magnetfeld kann die ausströmende Materie nicht bis zu beliebig großen Radien zwingen, mit der Winkelgeschwindigkeit des Sterns zu rotieren. In hinreichend hohem Abstand reichen die Feldstärken nicht mehr aus — nicht mehr das Magnetfeld bestimmt dann, wie sich die Materie zu bewegen hat, sondern die Materie bestimmt, wie sich das Feld zu verbiegen hat. Die Übertragung von Drehimpuls des Sterns auf die wegfliegende Materie durch das Magnetfeld ist von dort ab zu Ende.

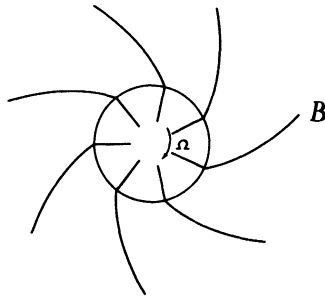


Abb. 28.2 Materie, die den Stern verläßt (Sternwind) und an den Feldlinien festhängt, verbiegt die aus dem Stern austretenden Feldlinien. Dadurch bekommen diese an der Oberfläche einen Knick, und es entsteht eine Zugwirkung, welche den Stern bremst.

Wir werden hier zunächst zeigen, daß man damit einen sehr effektiven Mechanismus hat, um einen Stern von hoher Rotationsgeschwindigkeit auf langsame Rotation abzubremsen. Dann werden wir im nächsten Paragraphen zeigen, wie sich Magnet- und Geschwindigkeitsfeld im zirkumstellaren Raum einstellen.

Den oben beschriebenen Mechanismus können wir grob folgendermaßen darstellen: Der Stern der Masse M verliere in seiner Äquatorebene pro Sekunde die Masse dM/dt . Durch das Magnetfeld werde die abströmende Materie bis zur Entfernung L gezwungen, an der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω des Sterns teilzunehmen, dann werde die Materie vom Stern entkoppelt. Es sei $KMR^2\Omega$ der Drehimpuls des Sterns. Wenn ein Gramm Materie mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in der Entfernung L entlassen wird, dann nimmt es den Drehimpuls $D=L^2\Omega$ mit. Damit folgt:

$$(28.8) \quad \frac{d}{dt} (KMR^2\Omega) = L^2\Omega \frac{dM}{dt}.$$

Division durch $MR^2\Omega$ ergibt dann (Punkte symbolisieren die Ableitungen nach t)

$$(28.9) \quad K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \left(\frac{L^2}{R^2} - K \right) \frac{\dot{M}}{M} \approx \frac{L^2}{R^2} \frac{\dot{M}}{M}.$$

Dabei haben wir $L^2/R^2 \gg K$ angenommen, was plausibel ist, wenn die Materie in hinreichend weitem Abstand entkoppelt wird. Aus Gl. (28.9) folgt

$$(28.10) \quad \Omega \sim M^{L^2/KR^2}.$$

Wie effektiv die Abbremsung des Sterns vonstatten geht, sieht man schon aus Gl. (28.9). In einem bestimmten Zeitraum möge der Stern die Masse ΔM verlieren, dann ist die Verringerung $\Delta \Omega$ der Winkelgeschwindigkeit durch die Beziehung

$$(28.11) \quad \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{L^2}{R^2 K} \frac{\Delta M}{M}$$

gegeben. Wenn also etwa $L/R \approx 100$ ist, dann hat man

$$(28.12) \quad \frac{\Delta \Omega}{\Omega} \approx 10^5 \frac{\Delta M}{M}.$$

Während der Stern den Bruchteil 10^{-5} seiner Masse abläßt, verringert sich seine Winkelgeschwindigkeit schon um die Größenordnung ihres eigenen Betrages!

Für die Sonne ist $\Omega = 2.7 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$. Wenn wir annehmen, daß sie wie ein starrer Körper rotiert (was schon an ihrer Oberfläche nur annähernd stimmt), dann liegt ihr Drehimpuls J bei $2 \times 10^{48} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ (dabei ist ihr Trägheitsmoment aus ihrer wahren Dichteverteilung bestimmt worden). Der Sonnenwind führt pro Sekunde etwa 1.4×10^{12} Gramm Materie von der Sonne ab. (Das ist weniger als die Sonne durch ihre elektromagnetische Strahlung an Äquivalentmasse verliert!) In der gesamten Lebenszeit der Sonne hat sie – stets gleichbleibenden Massenverlust vorausgesetzt – nur etwa 10^{-4} Sonnenmassen verloren. Wie steht es nun mit dem Drehimpulsverlust? Nehmen wir an, das abströmende Plasma werde bis zu einer Entfernung von 50 Sonnenradien vom Magnetfeld der Sonne zur Mitrotation gezwungen. Dann folgt

$$(28.13) \quad \dot{J} = L^2 \Omega \dot{M} = 4.58 \times 10^{31} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2},$$

und man kann durch $\tau = J/\dot{J}$ eine charakteristische Abklingzeit der Sonnenrotation definieren. Wir erhalten

$$\tau \approx 1.4 \times 10^9 \text{ Jahre.}$$

Während also die Sonne praktisch nichts an Masse verliert, so reicht mit unseren Annahmen der geringfügige Massenverlust doch aus, um die Sonne innerhalb ihrer Lebenszeit merklich abzubremesen.

§ 29. Magnetohydrodynamik des Sternwindes

Im letzten Paragraphen lernten wir die Wechselwirkung zwischen Sternwind und Magnetfeld als einen recht effektiven Mechanismus kennen, um Drehimpuls von einem rotierenden Stern abzuführen. Dabei hatten wir diese Wechselwirkung nur recht pauschal betrachtet. Vor allem die Entkopplung der wegfliegenden Materie vom Feld ist vorläufig noch ein etwas rätselhafter Vorgang. Dementsprechend wissen wir auch gar nicht, wo die Entkopplung wirklich stattfindet. Deshalb ist die für die Berechnung des Drehimpulsverlustes wichtige Größe L noch unbestimmt.

Verhältnismäßig leicht ist der stationäre Fall zu behandeln, der Fall also, bei dem sich ein stationäres Gleichgewicht zwischen der ins Unendliche abströmenden Materie und den ins Unendliche reichenden Feldlinien eingestellt hat. Wir folgen dabei einer Arbeit von Weber und Davis (1967).

Wir nehmen die Leitfähigkeit als unendlich an und denken uns ein Magnetfeld, das durch die hinausströmende Materie so verzerrt worden ist, daß es in der Nähe der Äquatorebene praktisch in dieser Ebene liegt. Wenn r, φ, ϑ ein Polarkoordinatensystem darstellen, in dem die Äquatorebene des Sterns durch $\vartheta = \pi/2$ gegeben ist, dann soll $B_\vartheta = 0$ sein. Die Materie soll so strömen, daß $v_\vartheta = 0$ ist. Weiterhin sei unser Problem axialsymmetrisch, d.h., alle Variablen seien unabhängig von φ . Da wir uns hauptsächlich für die Verhältnisse in der Äquatorebene interessieren, seien die Größen auch von ϑ unabhängig, es sei also $\partial/\partial\vartheta = 0$. Jetzt treten nur noch Ableitungen nach r auf. Aus der Bedingung der Stationarität folgt $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, daraus wird wegen $c\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ unter den oben genannten Bedingungen

$$(29.1) \quad c \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(v_r B_\varphi - v_\varphi B_r)] = 0.$$

Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich

$$(29.2) \quad r(v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) = \text{const.}$$

Wir nehmen weiterhin an, daß an der Oberfläche $v_r B_\varphi \ll v_\varphi B_r$ ist. Das bedeutet, daß die Ausflußgeschwindigkeit an der Oberfläche klein sein soll und die Feldlinien nicht tangential austreten sollen. Dann haben wir an der Oberfläche

$$(29.3) \quad r v_r B_\varphi - r v_\varphi B_r = -\Omega R^2 B_{r_0}.$$

Dabei ist Ω wieder die Winkelgeschwindigkeit des Sterns, R sein Radius und B_{r_0} der Wert von B_r an der Oberfläche.

Von der Bewegungsgleichung

$$(29.4) \quad \nabla P + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

interessiert uns nur die φ -Komponente. Unter Verwendung der Identität

$$(29.5) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

erhalten wir dann wegen $\partial/\partial\varphi = 0$ und $\partial/\partial\vartheta = 0$ für die φ -Komponente:

$$(29.6) \quad \rho v_r \frac{d}{dr} (r v_\varphi) = \frac{1}{4\pi} B_r \frac{d}{dr} (r B_\varphi).$$

Ferner liefern uns die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ und die Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ jetzt

$$(29.7) \quad \rho v_r r^2 = I = \text{const.},$$

$$(29.8) \quad r^2 B_r = \text{const.}$$

Schreiben wir jetzt die Gl. (29.6) in der Form

$$(29.9) \quad \frac{d}{dr} (r v_\varphi) = \frac{B_r r^2}{4\pi \rho v_r r^2} \frac{d}{dr} (r B_\varphi),$$

so folgt wegen Gl. (29.7) und (29.8), daß der Faktor $B_r r^2 / 4\pi \rho v_r r^2$ konstant ist. Setzen wir ihn gleich C , so ergibt Integration von Gl. (29.9)

$$(29.10) \quad r v_\varphi = C r B_\varphi + D.$$

Die Integrationskonstante D läßt sich anschaulich deuten. Dazu multiplizieren wir Gl. (29.10) mit ρv_r , ersetzen C und schreiben

$$(29.11) \quad \rho v_r r v_\varphi - \frac{r}{4\pi} B_r B_\varphi = \rho v_r D.$$

Gehen wir mit dieser Gleichung zur Sternoberfläche, so erhält man

$$(29.12) \quad \rho v_{r_0} v_{\varphi_0} R - \frac{1}{4\pi} B_{r_0} B_{\varphi_0} R = \rho_0 v_{r_0} D.$$

Der erste Term links ist dann der Drehimpulsverlust, den der Stern pro Sekunde erleidet, wenn Materie durch einen Quadratzentimeter seiner Oberfläche strömt. Dieser Drehimpulsverlust kommt allein daher, daß die Materie den Drehimpuls mitnimmt, den sie infolge der Rotation des Sterns besitzt.

Der zweite Term links läßt sich deuten, wenn man berücksichtigt, daß

$$(29.13) \quad \frac{1}{4\pi} B_{r_0} \llbracket B_{\varphi_0} \rrbracket = \frac{1}{4\pi} B_{r_0} B_{\varphi_0}$$

die Kraft pro Flächeneinheit ist (vgl. Gl. (17.7)), die das Magnetfeld auf die Sternoberfläche ausübt. Dabei ist $\llbracket B_{\varphi_0} \rrbracket = B_{\varphi_0}$ der Sprung der Tangentialkomponente, die innen null ist, außen dagegen einen endlichen Wert hat. Dann ist $B_{r_0} B_{\varphi_0} R/4\pi$ das Drehmoment, welches vom Feld am Quadratzentimeter Sternoberfläche ausgeübt wird. Das Drehmoment ist aber der Drehimpulsverlust pro Sekunde, also stellt die linke Seite der Gl. (29.12) den gesamten Drehimpulsverlust pro Zeiteinheit dar, den der Stern pro Flächeneinheit erleidet. Damit folgt, daß D der Drehimpulsverlust pro Gramm Sternmaterie ist. D ist also die schon in § 28 benutzte Größe, für die wir dort $D = L^2 \Omega = L^2 v_{\varphi_0}/R$ gesetzt hatten.

Wir wollen jetzt L bestimmen. Dazu definieren wir eine dimensionslose Zahl M_A gemäß

$$(29.14) \quad M_A^2 = \frac{v_r^2}{B_r^2/4\pi\rho} = \frac{v_r^2}{v_A^2}.$$

Sie ist in Analogie zur Mach-Zahl gebildet, nur daß jetzt die Alfvén-Geschwindigkeit an die Stelle der Schallgeschwindigkeit tritt. Dann folgt wegen Gl. (29.7) und (29.8)

$$(29.15) \quad M_A^2 = \frac{I v_r r^2}{(r^2 B_r)^2/4\pi} = \frac{4\pi I^2}{(r^2 B_r)^2} \cdot \frac{1}{\rho} \sim \frac{1}{\rho}.$$

M_A nimmt also nach außen zu wie $\rho^{-1/2}$. Nun wollen wir v_φ berechnen. Dazu nehmen wir Gl. (29.3) und berücksichtigen Gl. (29.8), dann erhalten wir

$$(29.16) \quad r v_r B_\varphi = r(v_\varphi - r \Omega) B_r$$

oder mit Gl. (29.7)

$$(29.17) \quad I B_\varphi = (v_\varphi - r \Omega) \rho r^2 B_r.$$

Eliminieren wir nun B_φ aus den Gleichungen (29.11) und (29.16), dann folgt

$$(29.18) \quad v_\varphi = \frac{B_r}{4\pi\rho v_r} B_\varphi + \frac{D}{r} = \frac{1}{M_A^2} (v_\varphi - r \Omega) + \frac{D}{r}$$

oder

$$(29.19) \quad v_\varphi = \frac{\frac{D M_A^2}{r^2 \Omega} - 1}{M_A^2 - 1} \cdot r \cdot \Omega.$$

Damit v_φ regulär ist, muß für $M_A = 1$ auch der Zähler verschwinden. Dazu muß

$$(29.20) \quad D = r_A^2 \Omega$$

sein. Dabei ist r_A der Radius, bei dem die radiale Komponente der Ausflußgeschwindigkeit gleich ist der lokalen Alfvéngeschwindigkeit, also wo $M_A = 1$ ist. Damit ist L bestimmt:

$$(29.21) \quad L = r_A.$$

Natürlich haben wir damit L noch nicht eindeutig festgelegt; dazu müßten wir wissen, in welcher Entfernung $v_r = B_r/(4\pi\rho)^{1/2}$ wird. Wir müßten die radiale Komponente der Bewegungsgleichung benutzen und v_r in Abhängigkeit des Abstandes berechnen. Es genügt aber in vielen Fällen, für v_r einfach den Wert zu nehmen, den man aus einer Theorie des Sternwindes ohne Magnetfeld erhält. Der Leser sei auf die Originalarbeit von Weber und Davis (1967) hingewiesen für die weiteren Details. Hier sei nur noch auf die Topologie der Konfiguration hingewiesen. Die Feldlinien gehen ins Unendliche, sie sind aber nach außen zu immer mehr verwunden (B_r/B_φ fällt nach außen hin ab), der abströmenden Materie wird es also immer leichter, eine von der Winkelgeschwindigkeit des Sterns abweichende Geschwindigkeit zu haben und doch längs der starr rotierenden Feldlinien zu fließen.

Bei der Sonne erreicht der abströmende Sonnenwind in der Nähe der Erdbahn den Wert $M_A = 9.6$. Schätzt man mit plausiblen Annahmen hieraus den Wert für $L = r_A$ ab, so kommt man auf eine Entfernung, die zwischen 15 und 50 Sonnenradien liegt. Den Wert $L = 50 R_\odot$ hatten wir am Schluß von § 28 benutzt, um den Drehimpulsverlust der Sonne abzuschätzen.

§ 30. Pulsar-Elektrodynamik

Die Entdeckung der *Pulsare* gehörte zu den spektakulärsten astronomischen Ereignissen der letzten Jahre. Es handelt sich um Objekte, die einen scharfen Radio-Puls in extrem genau eingehaltenen Zeitabständen aussenden. Die Perioden liegen zwischen 0.033 und 3.7 sec.

Pulsare sind wahrscheinlich die Überreste von Supernovae; das sind gigantische Sternexplosionen, die den betreffenden Stern praktisch auseinanderreißen. Aus der nicht fortfliegenden Materie im Zentrum der Explosion entsteht dann wahrscheinlich der Pulsar. Im Jahre 1054 wurde so eine Explosion im Sternbild Taurus registriert; die auseinanderfliegenden Gasmassen sind noch heute als der Crab-Nebel beobachtbar. Wahrscheinlich wird der wesentliche Teil der Energie, die der Nebel abstrahlt, von dem in ihm befindlichen Pulsar nachgeliefert. Die vom Crabnebel und die vom Pulsar kommende Strahlung ist Synchrotron-Strahlung. Sie rührt also von relativistischen Elektronen her. Wer also den Crabnebel und seinen Pulsar erklären will, muß zeigen, wie dort Elektronen auf relativistische Geschwindigkeiten gebracht werden können.

Man glaubt heute, daß Pulsare rotierende Neutronen-Sterne mit starken eingefrorenen Magnetfeldern sind. Wenn die Symmetrieachse des Magnetfeldes nicht mit der Rotationsachse zusammenfällt, dann erfahren geladene Teilchen in der Umgebung ein elektromagnetisches Wechselfeld, in dem sie möglicherweise beschleunigt werden.

Wir werden uns im Folgenden mit einigen elektromagnetischen Eigenschaften eines rotierenden Neutronensterns beschäftigen. Schon im einfachen Fall, bei dem Rotationsachse und Symmetrieachse des Magnetfeldes zusammenfallen, treten dabei interessante Phänomene auf.

Wir folgen jetzt einigen Überlegungen von Goldreich und Julian (1969) über das elektromagnetische Feld eines rotierenden Neutronensternes. Sie zeigen, daß der Neutronenstern nicht im Vakuum rotieren kann, sondern von einer mitrotierenden Plasmawolke umgeben sein muß. Die Teilchen dieser Pulsar-Magnetosphäre stammen aus dem Neutronenstern selbst.

a) Das elektrische Feld eines rotierenden magnetischen Sterns

Ein Stern vom Radius R rotiere starr mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . Er besitze ein eingefrorenes Magnetfeld \mathbf{B} , das in guter Näherung durch ein Dipolfeld beschrieben werden kann und das symmetrisch zur Rotationsachse liegen möge. In einem geeignet gewählten Polarkoordinatensystem r, ϑ, φ (wobei ϑ der Winkelabstand von der Rotationsachse ist) hat man dann

$$(30.1) \quad \mathbf{B} = \frac{B_0 R^3}{r^3} (\cos \vartheta, \frac{1}{2} \sin \vartheta, 0)$$

(vgl. Gl. (5.6)). Dabei ist B_0 der Betrag der Feldstärke am Pol. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} im Innern des Sterns besitzt nur eine φ -Komponente:

$v_\varphi = r \Omega \sin \vartheta$. Nehmen wir jetzt die Leitfähigkeit als unendlich an, so folgt aus Gl. (30.1)

$$(30.2) \quad \mathbf{E}_i = -\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{B_0 R^3 \Omega}{c r^2} (\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta, -\sin \vartheta \cos \vartheta, 0).$$

Das ist das elektrische Feld \mathbf{E}_i , das ein an der Rotation des Sterns nicht teilnehmender Beobachter im Innern des Sterns mißt.

Wir nehmen nun zunächst an, der zirkumstellare Raum sei Vakuum. Dann muß das elektrische Feld im Außenraum ein Potentialfeld sein. Da das durch Gl. (30.2) gegebene elektrische Feld an der Oberfläche des Sterns nicht-verschwindende Tangentialkomponenten hat und da an der Unstetigkeitsfläche die elektrische Tangentialkomponente stetig sein muß, darf das elektrische Außenfeld nicht verschwinden. Wir müssen also das durch Gl. (30.2) gegebene elektrische Innenfeld nach außen so durch ein elektrisches Potentialfeld fortsetzen, daß die Tangentialkomponente stetig bleibt.

Es gibt aber im wesentlichen nur *ein* Potentialfeld, das die gleiche ϑ -Abhängigkeit der ϑ -Komponente besitzt wie das Feld von Gl. (30.2). Dieses Potentialfeld ist durch das Potential

$$(30.3) \quad \phi_a = C \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3}$$

gegeben, wobei C eine noch freie Konstante ist. In der Tat ist ϕ_a eine Lösung der Potentialgleichung, die in unseren Koordinaten und in unserer Symmetrie die Form

$$(30.4) \quad \Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}) = 0$$

besitzt; man kann sich durch Einsetzen davon überzeugen. Die ϑ -Komponente des Potentialfeldes lautet dann

$$(30.5) \quad E_{a\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_a}{\partial \vartheta} = \frac{6 C \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^4},$$

und man sieht, daß sie die gewünschte ϑ -Abhängigkeit hat.

Es fehlt jetzt nur noch der Nachweis, daß unsere Lösung ϕ_a die einzige mit der gewünschten ϑ -Abhängigkeit ist. Wir führen den Beweis hier nicht durch. Der Leser sei auf die entsprechende Literatur der Potentialtheorie verwiesen. Wenn wir die Tangentialkomponente von Gl. (30.2) und (30.5) an der Sternoberfläche $r=R$ stetig aufeinanderpassen, so folgt

$$(30.6) \quad C = -\frac{B_0 R^5 \Omega}{6c}, \quad \phi_a = -\frac{B_0 R^5 \Omega}{6c} \cdot \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3}.$$

Die Feldstärke im Außenraum ergibt sich aus $E_a = -\nabla \phi_a$ zu

$$(30.7) \quad E_{ar} = -\frac{B_0 R^5 \Omega}{2c} \cdot \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^4}, \quad E_{a\vartheta} = -\frac{B_0 R^5 \Omega}{c r^4} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad E_{a\varphi} = 0.$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes ist unstetig, wir erhalten daraus eine Oberflächenladung σ^* :

$$(30.8) \quad \sigma^* = \frac{1}{4\pi} (E_{ar} - E_{ir}) = -\frac{B_0 R \Omega}{4\pi c} \cos^2 \vartheta.$$

b) Elektrische Kräfte an der Oberfläche

Magnetisches und elektrisches Feld stehen im Außenraum nicht senkrecht aufeinander. Berechnen wir nämlich $E_a \cdot B$, so verschwindet dieser Ausdruck nicht – dabei ist es gleichgültig, ob wir für E_a und B die Komponenten in dem System nehmen, in dem der Stern mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert (in diesem System ist E_a durch Gl. (30.7) gegeben) oder in dem System, das mit dem Stern mitrotiert. Denn $E \cdot B$ ändert sich bei den Transformationen (1.4) bzw. (1.5) nicht. Wenn wir jetzt $E_a \cdot B$ im nichtrotierenden System bestimmen, so gibt uns dieser Ausdruck auch gleichzeitig ein Maß für die elektrische Kraft, die ein geladenes, mitrotierendes Teilchen in Richtung des Magnetfeldes B erfährt. Aus Gl. (30.1) und (30.7) folgt

$$(30.9) \quad E_a \cdot B = -\frac{B_0^2 R \Omega}{c} \frac{R^7}{r^7} \cos^3 \vartheta.$$

Im Innern dagegen ist $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{B} = 0$, wie man sofort aus Gl. (30.2) erkennt. An der Sternoberfläche springt also $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ vom Innenwert null zu dem durch Gl. (30.9) gegebenen Außenwert. Solange außen keine geladenen Teilchen sind, ist es ohne Bedeutung, daß wegen $\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{B} \neq 0$ das elektrische Feld eine nichtverschwindende Komponente in Richtung des Magnetfeldes hat: es sind ja keine Teilchen da, die längs der magnetischen Feldlinie beschleunigt werden könnten.

Wie ist es aber an der Sternoberfläche? Dort haben wir einen Sprung von E_r und dementsprechend eine Oberflächenladung σ^* . In Wirklichkeit müssen wir aber annehmen, daß E_r an der Oberfläche *stetig* ist und daß man statt der unendlich dünnen Oberflächenladung eine Schicht endlicher Dicke hat. Dort wird $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ *stetig* von Null auf seinen Außenwert anwachsen. Es wird dort also Ladungen geben, die tatsächlich eine elektrische Kraft in Richtung der magnetischen Feldlinien (in deren Richtung sie frei beweglich sind) spüren. Wie groß ist diese Kraft? Kann man sie vernachlässigen, oder ist sie wichtiger als die Schwerkraft?

Wir nehmen anstatt des vollen Ausdruckes von Gl. (30.9) für $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ nur die Hälfte des Zahlwertes, um anzudeuten, daß wir uns für ein Gebiet in der Mitte der Übergangsschicht interessieren. Dann ist wegen $r = R$ an der Oberfläche

$$(30.10) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = - \frac{B_0^2 R \Omega}{2c} \cos^3 \vartheta.$$

Die Komponente der Beschleunigung in Richtung \mathbf{B} , die ein Teilchen der Masse m und der Ladung e erfährt, ist dann

$$(30.11) \quad b = \frac{e \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{m \cdot |\mathbf{B}|}.$$

Wegen Gl. (30.1) gilt

$$(30.12) \quad |\mathbf{B}| = \frac{B_0 R^3}{2r^3} (3 \cos^2 \vartheta + 1)^{1/2}.$$

Vergleichen wir diese elektrische Beschleunigung mit der Schwerebeschleunigung $g = GM/R^2$, wobei G die Gravitationskonstante ist und M die Masse des Sterns, so erhält man

$$(30.13) \quad \frac{b}{g} = - \frac{e B_0 R^3 \Omega}{m G c M} \cdot f(\vartheta),$$

wobei

$$(30.14) \quad f(\vartheta) = \cos^3 \vartheta \cdot (3 \cos^2 \vartheta + 1)^{-1/2}$$

ist.

Die dimensionslose Zahl b/g läßt sich noch etwas umformen. Dabei soll es uns nur auf eine Abschätzung ankommen, wir werden also Faktoren der Größenordnung Eins weglassen. Insbesondere beschränken wir uns auf ein Gebiet in Polnähe, so daß auch der Faktor $f(\vartheta)$ bei der Abschätzung weggelassen werden kann. $\omega_{ge} = -eB_0/mc$ ist die Gyrationfrequenz eines Elektrons am Pol, $-2\pi mc/eB_0$ ist entsprechend die Gyrationperiode τ_{ge} . Ω ist die Rotationsfrequenz des Sterns, $\tau_{rot} = 2\pi/\Omega$ die Rotationsperiode.

Wir führen jetzt noch eine andere Zeitskala ein, die in der Theorie des Sternaufbaus benutzt wird: es ist die Zeit, in der eine Schallwelle den Stern durchläuft. Das ist auch die Zeit, die ein Stern brauchen würde, um durch seine Eigengravitation in sein Zentrum zusammenzufallen, wenn plötzlich der Gasdruck aufhören würde zu wirken. Deshalb nennt man diese Zeit die *Frei-Fall-Zeit*, τ_{ff} . Sie ist größenordnungsmäßig gegeben durch

$$(30.15) \quad \tau_{ff} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

(Cox, Giuli 1968). Damit läßt sich das Verhältnis b/g in der Form

$$(30.16) \quad \frac{b}{g} \approx \frac{\tau_{ff}}{\tau_{ge}} \cdot \frac{\tau_{ff}}{\tau_{rot}}$$

schreiben. Es treten also jetzt nur noch Verhältnisse von Zeitskalen auf. Das Verhältnis τ_{ff}/τ_{rot} hat noch eine andere anschauliche Deutung: Es ist

$$(30.17) \quad \left(\frac{\tau_{ff}}{\tau_{rot}}\right)^2 = \frac{R^3 \Omega^2}{GM} = \frac{R \Omega^2}{g}.$$

Das ist aber jetzt das Verhältnis von Fliehkraft am Äquator zu Schwerkraft. Im allgemeinen ist $\tau_{ff}/\tau_{rot} < 1$, denn wenn τ_{ff}/τ_{rot} in die Größenordnung von Eins kommt, kann die Sternmaterie am Äquator nicht mehr von der Schwerkraft gehalten werden. Bei der Sonne beispielsweise ist $(\tau_{ff}/\tau_{rot})^2$ von der Größenordnung 10^{-5} .

c) Rotierende magnetische Neutronensterne

Neutronensterne haben keine nennenswerten Atmosphären – sie gehen in einer dünnen Übergangsschicht in das Vakuum über. Sie haben also eine wohl-

definierte Oberfläche. Neutronensterne enthalten infolge der Instabilität der Neutronen gegenüber dem Zerfall in Elektronen und Protonen immer genügend Ladungsträger, so daß ihre Leitfähigkeit sehr groß ist. Also kann man annehmen, daß die Magnetfelder eingefroren sind. Hat der Stern ein Dipolfeld der Form von Gl. (30.1), dann werden sich Außenfeld und Oberflächenladung gemäß Gl. (30.7) und (30.8) einstellen, und an der Oberfläche werden auf die geladenen Teilchen elektrische Beschleunigungskräfte ausgeübt.

Man nimmt an, daß die Pulsperioden der Pulsare gleich der Rotationsperiode des Neutronensternes sind. Wir setzen also $\tau_{\text{rot}} = 1 \text{ sec}$. Die typischen Radien von Neutronensternen liegen bei $R \approx 10^6 \text{ cm}$, die Massen M bei etwa einer Sonnenmasse ($2 \times 10^{33} \text{ g}$). Dann liefert Gl. (30.15) $\tau_{\text{ff}} \approx 10^{-4} \text{ sec}$. Aus verschiedenen Argumenten folgt (vgl. auch § 11), daß das Oberflächenmagnetfeld eines Neutronensternes vielleicht eine Stärke von ca. $10^{12} \Gamma$ hat. Damit folgt eine Gyrationperiode für Elektronen von $\tau_{\text{ge}} \approx 10^{-19} \text{ sec}$. Dann wird gemäß Gl. (30.16) für Elektronen $b/g \approx 10^{11}$. Die Beschleunigungskraft des elektrischen Feldes in der Oberflächenschicht ist also sehr viel größer als die Schwerkraft. Die Elektronen werden also vom elektrischen Außenfeld aus der Oberflächenschicht nach außen gezogen. Goldreich und Julian (1969) schließen daher, daß ein rotierender Neutronenstern mit hinreichend starkem Magnetfeld nicht einfach von Vakuum umgeben sein kann, sondern daß Ladungen von seiner Oberfläche in den zirkumstellaren Raum gelangen müssen.

Es ist schwer zu sagen, welcher Zustand sich dann einstellt. Wenn Elektronen aus dem Stern entweichen, lädt er sich positiv auf, das erschwert das Entweichen von weiteren Elektronen. Zum anderen nehmen die bereits entwichenen Elektronen – von Feldlinien mitgeführt – an der Rotation des Sterns teil. Das erzeugt einen Strom, der das Magnetfeld im Außenraum deformiert. Die mitrotierenden Ladungen im Außenraum verbiegen das Magnetfeld, das seinerseits im rotierenden Stern eingefroren ist. Die Normalkomponente des Magnetfeldes an der Sternoberfläche kann also durch den Strom im Außengebiet nicht geändert werden. Wohl aber kann die Tangentialkomponente an der Oberfläche einen Sprung machen. Unmittelbar unter der Oberfläche hat sie noch den alten, eingefrorenen Wert, unmittelbar oberhalb der Oberfläche ist sie bereits durch die Ströme des Außengebietes geändert. Als Folge davon muß dann in der Oberfläche ein Flächenstrom fließen.

Wenn die Feldlinien im Außenraum geeignet deformiert werden, können auch positive Ionen den Stern verlassen und längs der Feldlinien nach außen fliegen. Zur Veranschaulichung denken wir uns die Feldlinien der Einfachheit halber im Außenraum so deformiert, daß die Tangentialkomponente unmittelbar oberhalb der Sternoberfläche verschwindet. Dann treten die Feldlinien

senkrecht aus der Sternoberfläche aus: $B_r = B_r(\vartheta)$, $B_\vartheta = 0$, $B_\varphi = 0$ mit $B_r(\vartheta = 0) = B_0$. Ferner sei $B_r \geq 0$ im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Dann folgt aus Gl. (30.1) und (30.7) für eine Stelle unmittelbar über der Sternoberfläche

$$(30.18) \quad \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{B} = -\frac{B_0^2 R \Omega}{2c} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \cos \vartheta.$$

In Gl. (30.9) hatte $\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{B}$ in einer Hemisphäre einheitliches Vorzeichen, und als Folge davon wurden nur negative Ladungen nach außen gezogen, positive wurden in den Stern hineingedrückt. Jetzt wechselt $\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{B}$ das Vorzeichen bei $\vartheta = \vartheta^*$, wobei ϑ^* durch $3 \cos^2 \vartheta^* = 1$ bestimmt ist. Elektronen entweichen nach außen im Bereich $0 \leq \vartheta < \vartheta^*$, während im Bereich $\vartheta^* < \vartheta < \pi/2$ positive Ionen nach außen gezogen werden. So kann der Stern Plasma in den Raum abgeben, ohne sich selbst aufzuladen.

Der Raum in der Nähe des Neutronensternes ist also kein Vakuum; er ist mit Plasma erfüllt, das wegen des eingefrorenen Magnetfeldes starr mit dem Stern mitrotiert. Weiter draußen ist das nicht mehr möglich, da sonst die Umlaufgeschwindigkeit der Teilchen größer als die Lichtgeschwindigkeit würde. Dort stellen sich andere, kompliziertere Ladungs- und Feldverteilungen ein, es treten dort auch toroidale Feldkomponenten auf. Goldreich und Julian zeigten, daß die aus dem Stern ausgetretenen Ladungen in den äußeren, nicht starr mitrotierenden Gebieten auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Diese relativistischen Teilchen erzeugen dann vielleicht die energiereiche Synchrotronstrahlung, die man beispielsweise im Crab-Nebel beobachtet.

Wir haben uns hier nicht mit dem Entstehungsmechanismus der Pulse selbst befaßt; auch dazu gibt es schon Theorien, die in vereinfachten Fällen (Magnetfeldachse senkrecht zur Rotationsachse) gepulste Abstrahlung liefern (Ostriker, Gunn 1969). Warum die Pulse aber so scharf sind, ist noch ungeklärt. Der gegenwärtige Stand der Pulsartheorie mit seinen vielen offenen Fragen ist kürzlich in einem Übersichtsartikel von Rudermann (1972) dargestellt worden.

Kapitel VI

ZWEIKOMPONENTENTHEORIE

Im Rahmen der Magnetohydrodynamik (Kap. II–V) betrachteten wir das Plasma als ein einheitliches, gut leitendes Medium. Es genügte den Gesetzen der Hydrodynamik und der Elektrodynamik. Es wurde beschrieben durch die magnetohydrodynamischen Grundgleichungen. Wir konnten damit eine Reihe von Eigenschaften studieren, durch die sich das Plasma von normaler, nichtleitender Materie unterscheidet.

In Wirklichkeit besteht das Plasma jedoch aus einem Gemisch von Elektronen, Ionen und eventuell auch aus neutralen Teilchen. Jede dieser drei Komponenten kann im Prinzip verschiedene mittlere Geschwindigkeiten, Partialdrucke und Temperaturen besitzen. Das alles wird in der in diesem Kapitel behandelten Zweikomponententheorie besser berücksichtigt. Wir werden uns das Plasma zusammengesetzt denken aus einem Elektronengas und einem Ionengas, die sich beide gegenseitig durchdringen. Eine eventuelle Neutralgaskomponente werden wir hier vernachlässigen.

Die Zweikomponententheorie ist eine Weiterführung der Magnetohydrodynamik. Man kann mit ihr eine Reihe neuer Phänomene erklären. In Kapitel VIII werden wir dann mit Hilfe einer statistischen Theorie unsere Beschreibung eines Plasmas noch weiter verfeinern.

§ 31. Die Gleichungen für die beiden Komponenten

Wir denken uns jetzt also das Plasma als aus einem Elektronengas und einem Ionengas bestehend. Die Größen des Ionengases kennzeichnen wir mit dem Index i , die des Elektronengases mit e . Dann lauten die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Komponenten

$$(31.1) \quad n_i m_i \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} = n_i q_i (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla P_i + \mathbf{k}_i,$$

$$(31.2) \quad n_e m_e \frac{d \mathbf{v}_e}{dt} = n_e q_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla P_e + \mathbf{k}_e.$$

Dabei sind n_i und n_e die Anzahldichten der Teilchen, m_i und m_e sind de-

ren Massen. Für die Ladungen gilt $q_e = -e$ und $q_i = Ze$, wobei Z die Ladungszahl der Ionen ist.

Die Vektoren k_i und k_e sind Kraftdichten, die auf die beiden Komponenten wirken. Steht das Plasma unter dem Einfluß der Gravitationsbeschleunigung g , dann sind k_i und k_e die Schwerkraftdichten $k_i = n_i m_i g$, $k_e = n_e m_e g$. Im Folgenden werden wir die Gravitation vorerst vernachlässigen. Später, in § 35, werden wir sie genauer diskutieren.

Wir berücksichtigen aber statt dessen in den Kraftdichten k_i und k_e die Wechselwirkungen der beiden Komponenten miteinander. Wenn Elektronengas und Ionengas verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, dann wird zwischen beiden Komponenten Impuls ausgetauscht, die Gase reiben sich aneinander. Mikroskopisch kommt die Wechselwirkung daher, daß die Elektronen in den Coulombfeldern der Ionen abgelenkt werden und auf diese Weise Impuls von einer Teilchensorte auf die anderen übertragen wird. Wir wollen hier den Impulsaustausch zwischen den beiden Komponenten mit einem einfachen Ansatz berücksichtigen, indem wir annehmen, daß die Kraft, die das Elektronengas auf das Ionengas ausübt (und die dem Betrage nach gleiche Kraft, die das Ionengas auf das Elektronengas ausübt), proportional zur Relativgeschwindigkeit der beiden Komponenten zueinander ist:

$$(31.3) \quad k_e = -k_i = \beta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e).$$

Den Proportionalitätsfaktor β wollen wir der Einfachheit halber als räumlich konstant ansehen. Wir erhalten dann die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(31.4) \quad n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right) = Z e n_i (E + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla P_i - \beta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e),$$

$$(31.5) \quad n_e m_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right) = -e n_e (E + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla P_e + \beta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e).$$

Dabei haben wir die substantiellen Ableitungen $d\mathbf{v}_i/dt$ und $d\mathbf{v}_e/dt$ der Gl. (31.1) und (31.2) in lokale Ableitungen umgewandelt. Dazu kommen noch die Kontinuitätsgleichungen für die beiden Komponenten

$$(31.6) \quad \frac{\partial n_i m_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i m_i \mathbf{v}_i) = 0,$$

$$(31.7) \quad \frac{\partial n_e m_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e m_e \mathbf{v}_e) = 0.$$

Dabei haben wir angenommen, daß weder Teilchen rekombinieren, noch neue Ionen entstehen.

Statt der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e und statt der Anzahldichten n_i , n_e der beiden Komponenten wollen wir jetzt auf die Gesamtmassendichte ρ , den Gesamtmassenstrom $\rho \mathbf{v}$ und auf die elektrische Stromdichte \mathbf{j} übergehen. Wir definieren ρ , \mathbf{v} und \mathbf{j} durch die Gleichungen

$$(31.8) \quad \rho = \rho_i + \rho_e = n_i m_i + n_e m_e,$$

$$(31.9) \quad \rho \mathbf{v} = \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e = n_i m_i \mathbf{v}_i + n_e m_e \mathbf{v}_e,$$

$$(31.10) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e = e (Z n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e).$$

Unser Ziel ist es nun, Gleichungen für \mathbf{v} , ρ und \mathbf{j} zu bekommen. Dazu müssen wir verschiedene Näherungsannahmen machen.

a) Näherungen

Im Folgenden wollen wir immer annehmen, daß zwischen den beiden Komponenten thermisches Gleichgewicht herrscht. Die Elektronentemperatur soll gleich der Ionentemperatur sein, und wir definieren als die Temperatur T des Plasmas $T = T_i = T_e$.

Eine Näherungsannahme, die wir nachfolgend fast immer machen werden, ist die der *Quasineutralität*: die Materie soll in guter Näherung immer neutral sein; etwaige Raumladungen, die auftreten, sollen klein sein. Physikalisch ist die Annahme der Quasineutralität in der guten Leitfähigkeit begründet. Starke positive Raumladungen etwa würden starke elektrische Felder bedingen, welche die frei beweglichen negativen Ladungen anziehen und einen Ladungsausgleich bewirken würden – genau wie sich im Innern eines guten Leiters Raumladungen ausgleichen. Wir werden aber später (§ 34) sehen, daß in kleinen Raumgebieten eines Plasmas die Annahme der Quasineutralität wegen der dann auftretenden Fluktuationen nicht mehr gut ist.

Quasineutralität bedeutet

$$(31.11) \quad \zeta \equiv \frac{Z n_i - n_e}{Z n_i} \ll 1$$

oder

$$(31.12) \quad Z n_i \approx n_e = n.$$

Für den Strom erhalten wir dann aus Gl. (31.10)

$$(31.13) \quad \mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e).$$

Die Annahme der Quasineutralität wird das Arbeiten mit den Gleichungen der Zweikomponententheorie sehr erleichtern. Eine weitere Vereinfachung folgt aus dem großen Massenunterschied zwischen Elektronen und Ionen. Es ist

$$(31.14) \quad \xi \equiv \frac{m_e}{m_i} \ll 1.$$

Die träge Masse des Plasmas wird in der Tat vor allem durch die Ionen bestimmt, denn aus Gl. (31.11) und (31.14) folgt

$$(31.15) \quad \frac{\rho_e}{\rho_i} = \frac{n_e m_e}{n_i m_i} = (1 - \xi) \xi Z \ll 1,$$

da Z keine große Zahl ist. Es gilt also $\rho \approx \rho_i$.

Der besseren Übersichtlichkeit halber führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$(31.16) \quad D_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i,$$

$$(31.17) \quad D_e = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e,$$

$$(31.18) \quad \mathbf{F}_i = Ze n_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \right) - \nabla P_i - \beta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e),$$

$$(31.19) \quad \mathbf{F}_e = -e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \right) - \nabla P_e + \beta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e).$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen (31.4) und (31.5)

$$(31.20) \quad n_i m_i D_i = \mathbf{F}_i,$$

$$(31.21) \quad n_e m_e D_e = \mathbf{F}_e.$$

Durch Addition und geeignete Subtraktion dieser beiden Gleichungen bekommen wir Gleichungen für \mathbf{v} , ρ und \mathbf{j} . Addition ergibt

$$(31.22) \quad n_i m_i \mathbf{D}_i + n_e m_e \mathbf{D}_e = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e.$$

Da die Reibungsterme bei Addition herausfallen, erhalten wir mit Gl. (31.10) und mit $P = P_e + P_i$

$$(31.23) \quad n_i m_i \mathbf{D}_i + n_e m_e \mathbf{D}_e = e (Z n_i - n_e) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P.$$

Wegen der Quasineutralität können wir den ersten Term der rechten Seite vernachlässigen und bekommen

$$(31.24) \quad n_i m_i \mathbf{D}_i + n_e m_e \mathbf{D}_e = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt schon mit der rechten Seite der makroskopischen Bewegungsgleichung überein, wie wir sie aus der Magnetohydrodynamik her kennen (vgl. Gl. (16.11)).

Bevor wir die linke Seite besprechen, leiten wir eine dem früheren Ohmschen Gesetz entsprechende Beziehung her. Dazu multiplizieren wir Gl. (31.20) mit $Z m_e$ und Gl. (31.21) mit m_i und subtrahieren sie voneinander:

$$(31.25) \quad \begin{aligned} m_i m_e (Z n_i \mathbf{D}_i - n_e \mathbf{D}_e) &= Z m_e \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{F}_e \\ &= e (Z^2 n_i m_e + n_e m_i) \mathbf{E} + \frac{e}{c} (Z^2 n_i m_e \mathbf{v}_i + n_e m_i \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \\ &\quad - Z m_e \nabla P_i + m_i \nabla P_e - \beta \mathbf{v}_i (Z m_e + m_i) + \beta \mathbf{v}_e (Z m_e + m_i). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir auf der rechten Seite $Z n_i \approx n_e = n$ und vernachlässigen wegen $m_e \ll m_i$ (bzw. $Z m_e \ll m_i$) $Z m_e$ gegen m_i , so bleibt

$$(31.26) \quad \begin{aligned} m_i m_e (Z n_i \mathbf{D}_i - n_e \mathbf{D}_e) &= e n m_i \mathbf{E} \\ &\quad + \frac{e n}{c} (Z m_e \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \\ &\quad + m_i \nabla P_e - \beta m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \end{aligned}$$

Dabei wurde $Z m_e \nabla P_i = m_e \nabla Z P_i$ gegen $m_i \nabla P_e$ vernachlässigt, denn im thermischen Gleichgewicht ist wegen $T_i = T_e = T$ beim idealen Gas auch

$$(31.27) \quad Z P_i = Z n_i k T = n_e k T = P_e,$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist. Der letzte Term von Gl. (31.26) läßt sich wegen Gl. (31.13) umschreiben in

$$(31.28) \quad -\beta m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = -\frac{\beta m_i}{e n} \mathbf{j}.$$

Multipliziert man nun Gl. (31.13) mit ρ_e bzw. mit ρ_i und addiert bzw. subtrahiert von Gl. (31.9), so ergeben sich die Beziehungen

$$(31.29) \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \frac{\rho_e}{e n \rho} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\rho_i}{e n \rho} \mathbf{j}.$$

Damit wird wegen $\rho \approx \rho_i$

$$(31.31) \quad Z m_e \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{v}_e = (Z m_e + m_i) \mathbf{v} + \frac{Z m_e \rho_e - m_i \rho_i}{e n \rho} \mathbf{j}$$

$$= m_i \mathbf{v} - \frac{m_i}{e n} \mathbf{j}.$$

Setzen wir das zusammen mit Gl. (31.28) in Gl. (31.26) ein, so erhalten wir nach Division durch $e n m_i$:

$$(31.32) \quad \frac{m_e}{e n} (Z n_i \mathbf{D}_i - n_e \mathbf{D}_e) = E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{e n c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$+ \frac{1}{e n} \nabla P_e - \frac{\beta}{e^2 n^2} \mathbf{j}.$$

Offenbar ist diese Gleichung das Ohmsche Gesetz, allerdings mit Zusatzgliedern, die durch die Zweikomponententheorie hinzukommen. Damit haben wir die Bewegungsgleichung (31.24) und das Ohmsche Gesetz (31.32) in einer Form vorliegen, in der zumindest auf der rechten Seite nur noch die makroskopischen Größen \mathbf{j} und \mathbf{v} stehen. Die linken Seiten sind noch relativ komplizierte Ausdrücke, die sich erst mit weiteren Näherungsannahmen vereinfachen lassen.

Vergleichen wir den \mathbf{j} -Term mit dem entsprechenden Term unseres früheren Ohmschen Gesetzes (z.B. Gl. (22.5)), so finden wir

$$(31.33) \quad \lambda = \frac{e^2 n^2}{\beta}.$$

Damit haben wir den Zusammenhang zwischen dem in Gl. (31.3) eingeführten Proportionalitätsfaktor β und der elektrischen Leitfähigkeit λ gefunden.

b) Kleine Geschwindigkeiten

Zusätzlich zur Quasineutralität und zur Annahme m_e bzw. $Z m_e \ll m_i$ fordern wir jetzt, daß relativ zu unserem Bezugssystem nur *kleine Geschwindigkeiten* $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e$ vorkommen. Wir können dann quadratische und höhere Glieder in diesen Größen vernachlässigen. Damit wird aus der linken Seite der Bewegungsgleichung (31.24) mit Gl. (31.16) und (31.17)

$$\begin{aligned}
 n_i m_i \mathbf{D}_i + n_e m_e \mathbf{D}_e &= n_i m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + n_i m_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \\
 &+ n_e m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \\
 (31.34) \qquad \qquad \qquad &= n_i m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + n_e m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (31.6) ist nun

$$\begin{aligned}
 n_i m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} &= \frac{\partial n_i m_i \mathbf{v}_i}{\partial t} - \mathbf{v}_i \frac{\partial n_i m_i}{\partial t} \\
 (31.35) \qquad \qquad \qquad &= \frac{\partial n_i m_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla \cdot (n_i m_i \mathbf{v}_i) = \frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t},
 \end{aligned}$$

da das fortgelassene Glied in \mathbf{v}_i von zweiter Ordnung ist. Da für \mathbf{v}_e eine analoge Gleichung gilt, erhalten wir mit Gl. (31.9)

$$(31.36) \qquad n_i m_i \mathbf{D}_i + n_e m_e \mathbf{D}_e = \frac{\partial \rho_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_e \mathbf{v}_e}{\partial t} = \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Da mit $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e$ auch \mathbf{v} klein ist, gilt ebenso

$$(31.37) \qquad \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

so daß wir schließlich aus Gl. (31.24) erhalten

$$(31.38) \qquad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P.$$

Wir bekommen also die Bewegungsgleichung, die wir schon von der Magneto- hydrodynamik her kennen. Dort stand allerdings links die substantielle Ableitung $d\mathbf{v}/dt$, von der sich die lokale Ableitung von Gl. (31.38) durch Glieder zweiter Ordnung in \mathbf{v} unterscheidet. Das erweiterte Ohmsche Gesetz (31.32) erhielten wir durch Subtraktion der Komponenten-Bewegungsgleichungen. Die linke Seite geht jetzt mit den Kontinuitätsgleichungen und der Definition von j (Gl. (31.13)) über in

$$\begin{aligned}
 (31.39) \quad \frac{m_e}{e n} (Z n_i D_i - n_e D_e) &= \frac{m_e}{e n} (Z n_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} - n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t}) \\
 &+ \frac{m_e}{e n} [\mathbf{v}_i \nabla \cdot (Z n_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{v}_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)] \\
 &= \frac{m_e}{e^2 n} \cdot e n \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} \right) = \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial j}{\partial t} .
 \end{aligned}$$

Damit wird Gl. (31.32)

$$(31.40) \quad \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial j}{\partial t} = E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{e n c} j \times \mathbf{B} + \frac{1}{e n} \nabla P_e - \frac{1}{\lambda} j .$$

Auf der linken Seite bleibt also nur ein Term $\partial j/\partial t$ übrig, der *Strombeschleunigungsterm*. Die Glieder $j \times \mathbf{B}$ und ∇P_e , die ebenfalls neu im Ohmschen Gesetz sind, werden wir weiter unten besprechen. Die Gleichungen (31.38) und (31.40) sind die Grundgleichungen der Zweikomponententheorie im Fall von kleinen Geschwindigkeiten.

c) Schleichende Diffusion

Man sollte erwarten, daß im Fall verschwindender elektromagnetischer Felder unsere Plasmagleichungen in die der gewöhnlichen Hydrodynamik übergehen. Das ist aber bei den eben hergeleiteten Gleichungen nur für kleine Geschwindigkeiten der Fall. Andernfalls sind $d\mathbf{v}/dt$ und $\partial \mathbf{v}/\partial t$ merklich voneinander verschieden, und statt der hydrodynamischen Gleichung $\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla P$ erhalten wir im Fall verschwindender Schwerkraft aus Gl. (31.38) nur $\rho \partial \mathbf{v}/\partial t = -\nabla P$. Das liegt eben daran, daß wir bei der Herleitung von Gl. (31.38) höhere Terme in \mathbf{v}_i und \mathbf{v}_e und damit auch höhere Terme in \mathbf{v} vergessen haben. Man kann nun statt der Annahme kleiner Geschwindigkeiten auch eine andere Näherungsannahme machen, die der *schleichenden Diffusion* (Schlüter 1950, 1959).

Damit ist gemeint, daß die Elektronenkomponente und die Ionenkomponente sich bei ihrer Bewegung gegeneinander so stark reiben, daß jede Be-

schleunigung, der die Ionenkomponente ausgesetzt ist, sich sofort auch auf die Elektronenkomponente überträgt. Man kann also annehmen, daß

$$(31.41) \quad \left| \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} - \frac{d \mathbf{v}_e}{dt} \right| / \left| \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} \right| \ll 1$$

gilt.

Diese Annahme ist nicht ungewöhnlich. Bewegt man etwa eine brennende Taschenlampe beschleunigt durch den Raum, so werden die Elektronenkomponente und die Ionenkomponente in den leitenden Teilen der Lampe in guter Näherung gleich beschleunigt. Trotzdem haben sie nicht die gleiche Geschwindigkeit, es fließt ja Strom. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir die Lampe mit großer Geschwindigkeit bewegen. Wir können also erwarten, daß wir mit dieser Näherung auch zu großen Geschwindigkeiten \mathbf{v} gehen können. Anders dagegen ist es in dem Augenblick, in dem die Lampe angeschaltet wird. Dann ist die Beschleunigung der Elektronenkomponente von der der Ionenkomponente merklich verschieden – solange, bis der Strom seine volle Stärke erreicht hat.

Wenn wir die Annahme schleichender Diffusion machen, dann werden wir Gleichungen erhalten, die zwar in der Geschwindigkeit auch in höherer Näherung richtig sind, wir werden aber darauf verzichten müssen, Effekte wie Einschaltvorgänge und hochfrequente Schwingungen zu beschreiben, bei denen die verschiedenen Beschleunigungen der beiden Komponenten wichtig sind. In der Gleichung (31.40) rührte der Strombeschleunigungsterm $(m_e \partial j / \partial t) / e^2 n$ gerade von der unterschiedlichen Beschleunigung der beiden Komponenten her – wir können also nicht erwarten, daß er im Falle der Annahme schleichender Diffusion wieder auftritt.

Wir nehmen wieder Quasineutralität an, vernachlässigen die Elektronenmasse gegenüber der Ionenmasse und benutzen jetzt die Annahme (31.41) der schleichenden Diffusion. Wir können direkt von Gl. (31.24) und (31.33) ausgehen und brauchen uns nur noch mit den linken Seiten zu befassen. Aus der linken Seite von Gl. (31.24) wird mit der Voraussetzung (31.41) und wegen $m_e \ll m_i$

$$(31.42) \quad \begin{aligned} n_i m_i D_i + n_e m_e D_e &= n_i m_i \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} + n_e m_e \frac{d \mathbf{v}_e}{dt} = \\ (n_i m_i + n_e m_e) \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} &= n_i m_i \frac{d \mathbf{v}_i}{dt} = \rho \frac{d \mathbf{v}}{dt}, \end{aligned}$$

wobei $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ ist. Es ergibt sich also die ganz normale Bewegungsgleichung der Magnetohydrodynamik mit der substantiellen Ableitung auf der linken Seite. Die Gleichung ist also auch für größere Geschwindigkeiten gültig.

Wie sieht es dagegen mit der linken Seite des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes (31.33) aus? Sie lautet mit $Z n_i \approx n_e = n$ im Rahmen unserer Näherung

$$(31.43) \quad \frac{m_e}{e n} (Z n_i \mathbf{D}_i - n_e \mathbf{D}_e) = \frac{m_e}{e} \left(\frac{d \mathbf{v}_i}{dt} - \frac{d \mathbf{v}_e}{dt} \right) = 0.$$

Man bekommt also keinen Strombeschleunigungsterm $\partial j/\partial t$ mehr. Die Differenz der substantiellen Ableitungen auf der linken Seite verschwindet, ergibt hier also einen ganz anderen Wert als im Fall der kleinen Geschwindigkeiten. Zur Beschreibung von Wellenphänomenen mit hohen Frequenzen im Plasma ist die obige Annahme der schleichenden Diffusion nicht geeignet, denn wie wir in § 39 sehen werden, ist dafür gerade der Strombeschleunigungsterm $\partial j/\partial t$ wichtig.

Damit haben wir die Bewegungsgleichung und das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz der Zweikomponententheorie für zwei Fälle gewonnen. Es sei noch einmal bemerkt, daß die genaue Form von den jeweiligen Näherungsannahmen abhängt.

Der Term $\mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ in der Bewegungsgleichung, den wir in der Magnetohydrodynamik etwas künstlich durch Mittelung über die Kraftwirkungen auf einzelne Teilchen als äußere Kraftdichte einführen mußten, ergibt sich hier zwangsläufig aus den Bewegungsgleichungen der einzelnen Komponenten.

Im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz treten neben dem Strombeschleunigungsterm zwei neue Glieder auf: Der Term $\mathbf{j} \times \mathbf{B}/ec n$ heißt der *Hall-Term*, denn er beschreibt den *Hall-Effekt*! Die sich bewegenden geladenen Teilchen, und damit der Strom, werden im Magnetfeld durch die Lorentzkraft abgelenkt. Das Resultat ist eine zusätzliche elektrische Spannung senkrecht zu \mathbf{j} und senkrecht zu \mathbf{B} .

Gehen wir nun zum zweiten neuen Term. Nach Gl. (31.27) gilt für den Gesamtdruck

$$(31.44) \quad P = P_i + P_e = P_e/Z + P_e$$

und der Term mit dem Druckgradienten in Gl. (31.40) läßt sich schreiben

$$(31.45) \quad \frac{1}{e n} \nabla P_e = \frac{Z}{1+Z} \frac{1}{e n} \nabla P.$$

Er heißt der *Druckdiffusionsterm*. Er besagt, daß bei nichtverschwindendem Druckgradienten die beiden Teilchensorten gegeneinander diffundieren und einen Strom in Richtung $-\nabla P$ erzeugen.

§ 32. Diskussion der neuen Gleichungen

Wir stellen jetzt alle Gleichungen zusammen, durch die das Plasma in der Zweikomponententheorie beschrieben wird. Das sind die Bewegungsgleichung, die Kontinuitätsgleichung, das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz, die Maxwell'schen Gleichungen und die Zustandsgleichung. Wir begnügen uns dabei auf die Form der Gleichungen in der Näherung für kleine Geschwindigkeiten (§ 31.b) und erhalten das folgende System:

$$(32.1) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P,$$

$$(32.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$(32.3) \quad \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ec n} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{Z}{en(Z+1)} \nabla P - \frac{1}{\lambda} \mathbf{j},$$

$$(32.4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$(32.5) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(32.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(32.7) \quad P = P(\rho, T).$$

Dabei haben wir beim Druckdiffusionsterm in Gl. (32.3) von der für das ideale Gas geltenden Beziehung (31.45) Gebrauch gemacht. Wie in der Magnetohydrodynamik so tritt auch hier noch eine Gleichung hinzu, welche die zeitlichen Veränderungen von Druck und Dichte miteinander verknüpft. Wie wir schon früher in § 16 sahen, hängt diese Verknüpfung vom thermischen Verhalten des Plasmas ab. Dort wie hier sind zwei wichtige Grenzfälle die der *Adiabasie* (vgl. Gl. (16.5)) und der *Isothermie* (vgl. Gl. (16.4)).

Die Kontinuitätsgleichung (32.2) haben wir bisher noch nicht hergeleitet, sie folgt durch Addition der Gln. (31.6) und (31.7). Die Maxwell'schen Gleichungen (32.4) bis (32.6) sind natürlich dieselben wie früher, wir haben aber in Gl. (32.4) noch den Verschiebungsstrom mitgenommen.

Hat man eine Lösung der obigen Gleichungen gefunden, dann kann man aus der vierten Maxwellgleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma$ die Raumladungsdichte σ ausrechnen und nachprüfen, ob die Größe

$$(32.8) \quad \zeta \equiv \frac{Z n_i - n_e}{Z n_i} = \frac{m_i}{Z e} \frac{\sigma}{\rho}$$

wirklich klein gegen Eins ist, wie in Gl. (31.11) gefordert wurde.

a) Leitfähigkeit und Stoßfrequenz

Im Rahmen der Magneto hydrodynamik war die Leitfähigkeit λ eine vorgegebene Materialkonstante. In der Zweikomponententheorie sind wir jetzt in der Lage, λ durch andere physikalische Größen auszudrücken. Wegen $\lambda = e^2 n^2 / \beta$ müssen wir dazu die Reibungskonstante β der beiden Komponenten bestimmen. β hängt vom Mechanismus des Stoßprozesses zwischen Elektronen und Ionen ab, denn die Reibungskraft ergibt sich aus dem mittleren dabei übertragenen Impuls.

Da es uns nur auf eine grobe Abschätzung ankommt, legen wir unser Bezugssystem an den Ionen fest. Diese bewegen sich wegen ihrer hohen Masse nur wenig relativ zum Schwerpunktsystem, während die Elektronen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$ auf die Ionen prallen. Weiterhin beschränken wir uns auf Stöße, bei denen die Elektronen in bezug auf die Ionen um 90° abgelenkt werden (strenggenommen müßte man über alle Ablenkungswinkel in geeigneter Weise mitteln).

Bei einer 90° -Ablenkung hat das Elektron nach dem Stoß keine Geschwindigkeitskomponente mehr in Richtung $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$. Es wird also bei so einem Stoß der Impulsbetrag

$$(32.9) \quad m_e |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i|$$

von der einen Gaskomponente (Elektronen) auf die andere (Ionen) übertragen. Multiplikation mit n und mit der Stoßfrequenz pro Ion ν liefert die Volumenkraft der einen Komponente auf die andere:

$$(32.10) \quad n \nu |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| m_e = |k_i| = |k_e|.$$

Dabei ist $n\nu$ die Zahl der Stöße pro cm^3 und sec. Nach Gl. (31.3) folgt dann mit $K = |\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_e|$

$$(32.11) \quad \beta = \frac{K}{|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i|} = n\nu m_e$$

und für λ

$$(32.12) \quad \lambda = \frac{e^2 n^2}{\beta} = \frac{e^2 n}{\nu m_e}.$$

Jetzt haben wir die Materialkonstante λ durch Größen wie Teilchendichte und Stoßfrequenz ausgedrückt. Zur Berechnung der Stoßfrequenz ν muß man den Wirkungsquerschnitt kennen, den geladene Teilchen mit ihren Coulombfeldern beim Vorbeifliegen einander entgegenbieten. Je schneller Teilchen aneinander vorbeifliegen, umso geringer ist bei gleichem Abstand der Impulsaustausch, umso geringer ist die mittlere Stoßfrequenz für einen 90° -Stoß und umso größer ist deshalb die Leitfähigkeit. Die Leitfähigkeit steigt also mit steigender Temperatur. Die genauere Rechnung gibt eine Abhängigkeit $\lambda \sim T^{3/2}$ (Kaplan, Pikelner 1970). Unsere Überlegungen mit 90° -Stößen sind ziemlich ungenau. Wegen der großen Reichweite der Coulombkräfte sind in Wirklichkeit die Stöße mit kleiner Winkelablenkung für den Impulsaustausch zwischen den beiden Komponenten viel wichtiger, da sie viel häufiger auftreten, als die Stöße mit großer Winkelablenkung.

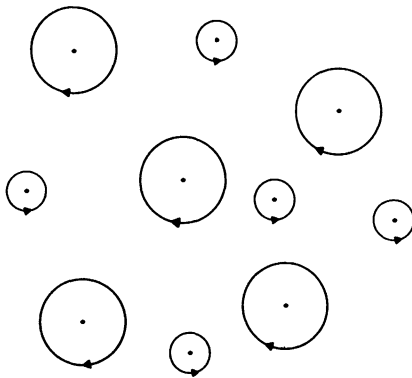


Abb. 32.1 Bei hoher Feldstärke und geringer Dichte sind die Gyrationen von Ionen und Elektronen so klein, daß bei Bewegung der Teilchen quer zu den Feldlinien kaum Stöße stattfinden.

Da die Stoßfrequenz ν ungefähr proportional zur Dichte n ist, ist nach Gl. (32.12) λ unabhängig von ρ . Die Aussage $\nu \sim \rho \sim n$ ist jedoch nur eine ziemlich grobe Näherung. ν hängt natürlich auch noch entscheidend vom Magnetfeld ab: Bei hoher magnetischer Feldstärke sind die Gyrationenradien der Teilchen so klein, daß sich bei genügend geringer Dichte die Teilchen in Richtung quer zum Magnetfeld kaum mehr nahe kommen können (Abb. 32.1). Längs der Feldlinien dagegen sind die Teilchen frei beweglich und haben in dieser Richtung dieselbe Stoßfrequenz wie im Fall ohne Feld. Die Folge ist eine *anisotrope Leitfähigkeit*; quer zum Feld ergibt sich eine kleinere Leitfähigkeit als in Längsrichtung. Bei starken Magnetfeldern, d.h., wenn der Gyrationenradius klein gegen den mittleren Teilchenabstand ist, ist die Leitfähigkeit in Längsrichtung gleich der Leitfähigkeit ohne Feld.

b) Abschätzungen

Die wichtigste Veränderung im System der Plasmagleichungen gegenüber dem System der magnetohydrodynamischen Gleichungen sind die Zusatzglieder im Ohmschen Gesetz, also der Hall-Term, der Druck-Diffusionsterm und der Strombeschleunigungsterm. Um uns ein wenig besser mit der Zweikomponententheorie vertraut zu machen, wollen wir diese Terme in Relation zu den anderen Gliedern im Ohmschen Gesetz abschätzen. Wenn die Bedingungen so sind, daß die neuen Terme vernachlässigt werden können, kommt man auf die alten Gleichungen der Magnetohydrodynamik zurück.

Für die Abschätzungen betrachten wir zunächst den statischen Fall

$$(32.13) \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Dann folgt aus Gl. (32.1)

$$(32.14) \quad \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla P.$$

Im statischen Fall lautet das Ohmsche Gesetz (32.3)

$$(32.15) \quad 0 = \mathbf{E} - \frac{1}{ecn} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{Z}{en(Z+1)} \nabla P - \frac{1}{\lambda} \mathbf{j}.$$

Mit Gl. (32.14) sieht man sofort, daß der Hall-Term $((Z+1)/Z)$ -mal so groß ist wie der Druckdiffusionsterm; für völlig ionisierten Wasserstoff ($Z=1$) ist er also doppelt so groß.

Wir fragen nun, wann der Hall-Term von derselben Größenordnung wird wie $|j|/\lambda$, d.h., wann

$$(32.16) \quad \left| \frac{j}{\lambda} \right| \approx \frac{1}{ecn} |j \times B|$$

gilt. Mit Gl. (32.12) ergibt sich

$$(32.17) \quad \left| \frac{j}{\lambda} \right| \approx |j| \frac{m_e}{e^2 n} \cdot \nu.$$

Andererseits erhalten wir

$$(32.18) \quad \frac{1}{ecn} |j \times B| \approx \frac{1}{ecn} |j| |B| = |j| \frac{m_e}{e^2 n} \frac{eB}{m_e c} = |j| \frac{m_e}{e^2 n} |\omega_{ge}|.$$

Dabei ist $|\omega_{ge}| = eB/m_e c$ die Gyrationfrequenz der Elektronen (vgl. Gl. (2.4)). Vergleich der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$(32.19) \quad \nu \approx \omega_{ge}.$$

Der Hall-Term wird also von gleicher Größenordnung wie der von der gegenseitigen Reibung herrührende Term, wenn die Elektronen zwischen zwei Stößen merklich gekrümmte Bahnen haben. Oben sahen wir bereits, daß im statischen Fall auch der Druckdiffusionsterm von gleicher Größenordnung wie der Hall-Term ist.

Jetzt wollen wir den nicht-stationären Fall betrachten und das Strombeschleunigungsglied $(m_e/e^2 n) \cdot \partial j/\partial t$ abschätzen. Es sei τ eine charakteristische Zeit, in der sich der Strom merklich ändert. Wenn der Strombeschleunigungsterm von der Größenordnung des Gliedes $|j|/\lambda$ ist, gilt

$$(32.20) \quad \frac{m_e}{e^2 n} \frac{|j|}{\tau} \approx \frac{1}{\lambda} |j|.$$

Daraus folgt

$$(32.21) \quad \frac{1}{\tau} \approx \frac{e^2 n}{m_e} \frac{1}{\lambda} = \frac{e^2 n}{m_e} \cdot \frac{\nu m_e}{e^2 n} = \nu.$$

Wir können also schließen: Der Strombeschleunigungsterm wird wichtig, wenn sich der Strom innerhalb der mittleren Stoßzeit wesentlich ändert.

§ 33. Partialdrücke des Zweikomponentengases

Wir haben oben angenommen, daß sich der Gasdruck unseres Zweikomponentengases additiv aus den Partialdrücken von Ionen- und Elektronenkomponente zusammensetzt. Dabei haben wir für diese beiden Partialdrücke angesetzt

$$(33.1) \quad P_i = n_i k T, \quad P_e = n_e k T.$$

Das scheint auf den ersten Blick falsch zu sein: wenn das Elektronengas etwa für sich allein in einem Kasten eingeschlossen ist, dann wird der Elektronendruck wesentlich durch die elektrostatische Abstoßung mitbestimmt. Das gleiche gilt für das Ionengas allein. In beiden Fällen sind die Drücke infolge der elektrostatischen Abstoßung wesentlich größer als bei neutralen Gasen gleicher Dichte. Wenn beide Gase im Kasten sind, neutralisieren sich aber die elektrischen Felder, und der Gesamtdruck sollte eigentlich kleiner sein als die Summe der Partialdrücke. Wir werden im Folgenden sowohl die einzelnen Komponenten wie auch das Zweikomponentengas im Kasten betrachten und werden dann sehen, daß das additive Zusammensetzen der Partialdrücke zum Gesamtdruck gerechtfertigt ist.

Ein Elektronengas fülle einen Kasten aus. Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall. Der Kasten sei also durch ein endliches Intervall auf der x -Achse gegeben. Die Mitte des Kastens möge bei $x = 0$ liegen. Wir betrachten den einfachsten Fall, in dem \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e und \mathbf{B} verschwinden. Dann folgt aus Gl. (31.5)

$$(33.2) \quad e n_e E_x + \frac{dP_e}{dx} = 0.$$

Wie wir gleich sehen werden, ist n_e im Kasten nicht konstant. Für den Druck gilt an jeder Stelle

$$(33.3) \quad P_e = n_e k T$$

und wenn wir Isothermie annehmen

$$(33.4) \quad e n_e E_x = - \frac{dP_e}{dx} = - k T \frac{dn_e}{dx}.$$

Aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma$ folgt

$$(33.5) \quad \frac{dE_x}{dx} = -4\pi e n_e.$$

Kombinieren wir Gl. (33.4) und (33.5), so erhalten wir

$$(33.6) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \right) = -\frac{e}{kT} \frac{dE_x}{dx} = \frac{4\pi e^2}{kT} n_e = C n_e, \quad C = \frac{4\pi e^2}{kT}.$$

Die Teilchendichte genügt also der Differentialgleichung

$$(33.7) \quad n_e \frac{d^2 n_e}{dx^2} - \left(\frac{dn_e}{dx} \right)^2 = C n_e^3.$$

Führen wir als neue Ortsvariable $\bar{x} = x/\sqrt{C}$ ein, so geht die Differentialgleichung (33.7) über in

$$(33.8) \quad n_e'' n_e - (n_e')^2 = n_e^3$$

(die Striche symbolisieren die Ableitungen nach \bar{x}).

Integration liefert

$$(33.9) \quad (n_e')^2 = 2 n_e^2 (n_e + D), \quad D = \text{const.}$$

Um die Lösung einfach übersehen zu können, betrachten wir das durch

$$(33.10) \quad n_e' = \pm n_e \sqrt{2(n_e + D)}$$

gegebene Richtungsfeld. Die Lösung muß in \bar{x} symmetrisch sein, damit $E_x \sim n_e'/n_e$ rechts und links nach außen zeigt. Wählt man als Randbedingung

$$(33.11) \quad D = -n_e(0), \quad n_e(0) > 0$$

und berücksichtigt für $\bar{x} > 0$ das positive und für $\bar{x} < 0$ das negative Vorzeichen der Wurzel in Gl. (33.10), so ergibt sich der in Abb. 33.1 wiedergegebene Verlauf im $\bar{x} - n_e$ -Diagramm. Diese Kurve ähnelt einer Parabel, steigt aber steiler an.

Die Kurve zeigt das Anwachsen der Teilchendichte zum Rand eines geschlossenen Kastens hin, in dem sich ein Gas von gleichartig geladenen Teil-

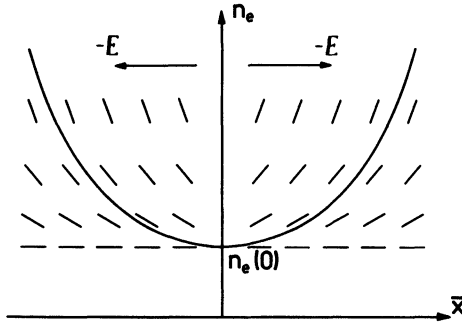


Abb. 33.1 Richtungsfeld der Differentialgleichung (33.10) mit der die Randbedingung (33.11) erfüllenden Lösung (durchgezogene Kurve).

chen befindet. Das ist eine Folge des elektrischen Feldes, das diese Teilchen aufbauen. Man erhält also insbesondere *nicht* eine über den ganzen Kasten konstante Dichte, wie sie ein neutrales Gas zeigen würde (Abb. 33.2).

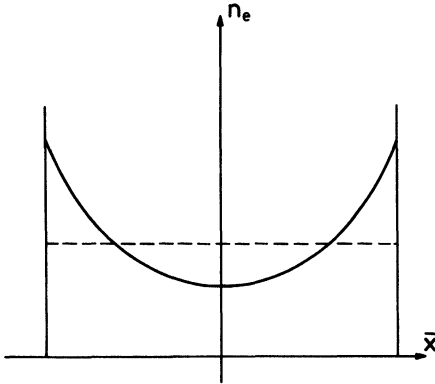


Abb. 33.2 Die Dichteverteilung eines zwischen zwei Wänden eingeschlossenen Elektronengases (durchgezogen) im Vergleich zu Dichteverteilung des Elektronengases, das durch eine Ionenkomponente elektrisch neutralisiert ist (gestrichelt).

Für den Druck gilt

$$(33.12) \quad P_e = n_e k T,$$

wobei n_e die in Abb. 33.2 gezeigte Ortsabhängigkeit besitzt. Eine entsprechende Lösung erhält man, wenn man das Ionengas allein betrachtet.

Wie ist es nun, wenn Ionen- und Elektronengas beide im Kasten sind und wenn unsere Annahme der Quasineutralität gilt? Dann haben wir anstelle von Gl. (33.4) die beiden Gleichungen

$$(33.13) \quad e n_e E_x = -k T \frac{d n_e}{d x},$$

$$(33.14) \quad -Z e n_i E_x = -k T \frac{d n_i}{d x}$$

und anstelle von Gl. (33.5)

$$(33.15) \quad \frac{d E_x}{d x} = 4\pi (Z n_i - n_e) = 0.$$

Es folgt dann

$$(33.16) \quad \frac{d^2 n_e}{d x^2} = \frac{d^2 n_i}{d x^2} = 0.$$

n_e und n_i sind also lineare Funktionen in x . Wenn die Dichten symmetrisch zu $x = 0$ sein sollen, folgt $n_e = n_i = \text{const.}$ Die gegenseitige Kompensation der elektrischen Felder hat zur Folge, daß die Dichteverteilungen n_i, n_e ganz anders sind als im Fall der einzelnen Komponenten! Der Gesamtdruck ist also

$$(33.17) \quad P = n_i k T + n_e k T.$$

Die gegenseitige Kompensation der elektrischen Felder, die den Verdacht nahelegte, daß die Partialdrücke nicht einfach addiert werden dürfen, ist dabei automatisch in den Dichten von Ionen und Elektronen schon berücksichtigt.

Wenn die Gyrationfrequenz größer als oder vergleichbar mit der Stoßfrequenz wird, dann unterscheidet sich der Druck der beiden Komponenten von dem eines idealen Gases. Allgemein ist der Druck ein Tensor, dessen Komponenten $P_{ik} = m n \overline{u_i u_k}$ ($i, k = 1, 2, 3$) sind, dabei ist \mathbf{u} der Vektor der *thermischen* Geschwindigkeit. Der Querstrich bedeutet dabei Mittelung über alle Teilchen. Die Stöße zwischen den Teilchen sorgen normalerweise dafür, daß die thermische Bewegung isotrop ist. Dann sind die Diagonalglieder des Tensors P_{ik} alle gleich, während die Glieder außerhalb der Diagonalen verschwinden, weil u_i und u_k für $i \neq k$ nicht korreliert sind (vgl. die entsprechenden Schlüsse, die wir für die statistische Dynamotheorie in § 14 machten). Dann wird $P_{ik} = \delta_{ik} m n \overline{u^2}$, der Druck ist isotrop.

Das ist jetzt nicht mehr der Fall, da ein starkes Magnetfeld die Isotropie der Teilchenbewegung stört: Anstatt sich geradlinig von Stoß zu Stoß zu bewegen, bewegen sich die Teilchen in Korkenzieherbahnen; die Richtung des Magnetfeldes ist dadurch ausgezeichnet. Oft kann man sich damit behelfen, daß man zwei Drücke einführt, einen Druck P_{\parallel} parallel zur Feldrichtung, einen anderen, P_{\perp} , senkrecht dazu.

Wir gehen hier nicht weiter darauf ein und werden mit isotropem Gasdruck arbeiten. Bei den im folgenden Kapitel diskutierten Wellenlösungen spielt dieser Effekt keine Rolle.

§ 34. Die Debye-Länge

Eine unserer wesentlichsten Voraussetzungen in der Zweikomponententheorie ist die der Quasineutralität. Sie ist ein makroskopischer Begriff, der spätestens dann sinnlos wird, wenn man so kleine Volumina betrachtet, daß nur noch ein einziges Teilchen darin enthalten ist. Aber auch wenn man größere Volumina nimmt, kann man noch nicht unbedingt von Quasineutralität sprechen. Die Teilchen eines Gases sind ja nicht in Ruhe; wegen der thermischen Bewegung fluktuiert an jedem Ort die Dichte der Teilchen eines Ladungsvorzeichens. Dabei geschieht es immer wieder, daß ein bestimmtes Raumgebiet bevorzugt Teilchen einer Sorte enthält. In diesen Bereichen ist die Quasineutralität nicht mehr erfüllt.

Eine Abschätzung der Größe dieser Bereiche erhält man durch folgende Überlegung: Es mögen sich zufälligerweise einmal alle Elektronen von einem Punkt aus entfernen. Dann entsteht ein elektrisches Feld, welches das Auseinanderfliegen der Elektronen abbremst. Wir machen uns davon ein eindimensionales Modell: Eine planparallele Schicht der Dicke D sei durch zufällige, thermische Bewegung von allen Elektronen freigefegt. Die Ionen denken wir uns der Einfachheit halber unbeweglich, so daß in dem von den Elektronen verlassenen Raum eine konstante positive Raumladung herrscht. Die Elektronen denken wir am Rande der leergefegten Schicht als Oberflächenladung angesammelt. Zu dieser Ladungsverteilung gehört ein elektrisches Feld, dessen Potential ϕ in Abb. 34.1 wiedergegeben ist. Das Feld ist nur im Innern der Schicht von Null verschieden, nach außen hin wird es durch die Oberflächenladung abgeschirmt.

Wenn sich in unserem Fall durch die (eindimensionale) statistische Bewegung der Elektronen solch eine Schicht bildet, so geht kinetische Energie der

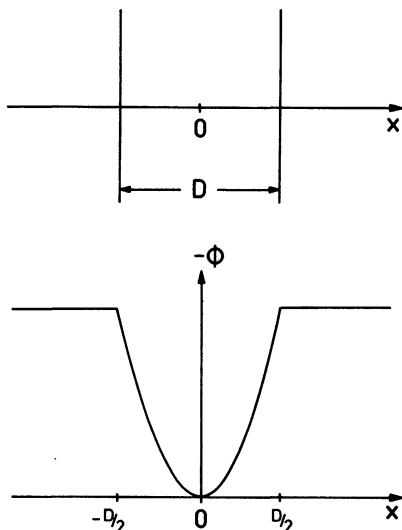


Abb. 34.1 Potential einer von Elektronen freigefegten planparallelen Schicht der Dicke D .

Elektronen in elektrische Feldenergie über. Wir beziehen nun alle Energie auf einen cm^2 der Seitenfläche unserer unendlich ausgedehnten, planparallelen Schicht. Die kinetische Energie der Elektronen, die vorher in der Schicht der Dicke D waren, ist proportional zu $n_e k T D$, wobei n_e die Elektronendichte vor der Bildung der Schicht ist. Die kinetische Energie ist also proportional zu D . Nun nimmt die rücktreibende Kraft, die die leergefegte Schicht wieder auffüllen möchte, linear mit der Dicke der Schicht zu, da die Kraft proportional zur Menge der aufgefegten Elektronen ist. Deshalb nimmt andererseits die elektrische Feldenergie pro cm^2 des Streifens quadratisch mit D zu. Es wird also eine bestimmte Breite D_0 geben, bei der die potentielle Energie gerade gleich der kinetischen Energie ist, welche die Elektronen besaßen, die vorher die Schicht ausfüllten. Wenn also in einem (elektrisch neutralen) Raumgebiet alle Elektronen ihre kinetische Energie benutzen, um sich so zu bewegen, daß eine von Elektronen freie Schicht entsteht, dann steigt mit wachsender Breite die potentielle Energie der Elektronen auf Kosten ihrer kinetischen Energie solange an, bis alle kinetische Energie aufgebraucht ist. Das ergibt eine charakteristische Schichtdicke D_0 , die wir jetzt berechnen wollen.

a) Abschätzung der charakteristischen Lineardimension D_0

Wir berechnen zunächst das Feld im Inneren der leergefegten Schicht. Wenn ϕ das Coulomb-Potential ist, gilt

$$(34.1) \quad E = -\nabla \phi.$$

Die Quellen des elektrischen Feldes im Innern sind die zurückgebliebenen Ionen, also gilt

$$(34.2) \quad \nabla \cdot E = 4\pi e Z n_i.$$

Daraus folgt

$$(34.3) \quad \Delta \phi = -4\pi e Z n_i.$$

In unserem eindimensionalen Fall ergibt das

$$(34.4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi e Z n_i = \text{const.},$$

denn die Ionendichte blieb voraussetzungsgemäß konstant. Die allgemeine Lösung ist

$$(34.5) \quad \phi(x) = -2\pi Z e n_i x^2 + C_1 x + C_2.$$

Dabei können wir die Integrationskonstante C_2 durch geeignete Normierung auf $C_2 = 0$ festlegen, dann ist $\phi = 0$ für $x = 0$. Wenn wir das Koordinatensystem so legen, daß alles symmetrisch um $x = 0$ ist, muß auch $C_1 = 0$ sein (Abb. 34.1). Das Potential im Außenraum schließen wir stetig an das Potential im Innern an. Außen ist das Potential wegen der abschirmenden Wirkung der an den Randflächen der Schicht aufgesammelten Elektronen konstant. Damit erhält man für Potential und elektrisches Feld:

$$(34.6) \quad \phi(x) = \begin{cases} -2\pi Z e n_i x^2 & (|x| \leq \frac{D}{2}), \\ -2\pi Z e n_i (\frac{D}{2})^2 & (|x| \geq \frac{D}{2}), \end{cases}$$

$$(34.7) \quad E(x) = \begin{cases} 4\pi Z e n_i x & (|x| \leq \frac{D}{2}), \\ 0 & (|x| \geq \frac{D}{2}). \end{cases}$$

Die Energie des elektrischen Feldes pro Flächeneinheit beträgt:

$$(34.8) \quad \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{1}{8\pi} E^2 dx = 2\pi e^2 Z^2 n_i^2 \cdot \int_{-D/2}^{+D/2} x^2 dx = 2\pi e^2 Z^2 n_i^2 \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3.$$

Diese Energie setzen wir gleich der mittleren kinetischen Energie der Elektronen pro Flächeneinheit, die diese vor dem Leerfeigen hatten. Wegen des eindimensionalen Modelles haben die Elektronen nur einen Freiheitsgrad, es gilt also für $D = D_0$

$$(34.9) \quad \frac{1}{2} n_e k T D_0 = \frac{4\pi}{3} e^2 Z^2 n_i^2 (D_0/2)^3.$$

Daraus folgt wegen $n_e = Z n_i$:

$$(34.10) \quad D_0 = \sqrt{\frac{3kT}{\pi e^2 n_e}}.$$

Statt des eindimensionalen Falles hätten wir auch eine andere geometrische Symmetrie betrachten können; wir hätten etwa berechnen können, wie große sphärisch symmetrische Löcher durch Umsetzen von kinetischer Energie in elektrische Feldenergie entstehen können. Man erhält für diesen Fall einen Radius, der von derselben Größenordnung ist. Die Größe D_0 nennt man die *Debye-Länge*. In Bereichen, die klein sind gegenüber der Debye-Länge, kann man keine Neutralität mehr erwarten. Die Bewegung der Elektronen schafft dort Fluktuationen in der Elektronendichte, so daß vorübergehend einmal die positive Ladung der Ionen, einmal die negative Ladung der Elektronen überwiegt. In Raumgebieten, die groß im Verhältnis zur Debye-Länge sind, kann man dagegen Ladungsneutralität erwarten, da die kinetische Energie dann nicht ausreicht, um über so große Raumgebiete hinweg die Gleichverteilung der Ladungsträger zu stören.

Wir geben einige typische Beispiele für die Größe der Debye-Länge an: In der Photosphäre der Sonne ergibt sich bei $T = 5 \times 10^3$ °k und $n_e \approx 10^{14}$ cm⁻³ eine Debye-Länge von $D_0 \approx 2 \times 10^{-4}$ cm. Im Orionnebel ist bei ähnlicher Temperatur ($T \approx 10^4$ °K) die Teilchendichte viel geringer; mit $n_e = 10^2$ cm⁻³ erhalten wir $D_0 \approx 3 \times 10^2$ cm (vgl. auch Abb. 34.2).

Wenn sich durch thermische Bewegung einmal ein elektronenfreies Loch vom Radius der Größenordnung D_0 gebildet hat, so bleiben die Elektronen natürlich nicht auf dem Rande dieses Loches sitzen; sie werden durch das elektrische Feld (34.7) zurückgezogen. Wie groß ist nun die Zeit für das Schließen eines solchen Loches?

b) Abschätzung der charakteristischen Zeit

Die Ladungsdichte an den beiden Randflächen unserer Schicht ist

$$(34.11) \quad -\frac{1}{2} e n_e D = -\frac{1}{2} Z e n_i D.$$

n_i ist dabei die Ionendichte in der elektronenfreien Schicht. Die Massendichte auf jedem Rand ist

$$(34.12) \quad \rho^* = n_e m_e D/2.$$

Die Kraftdichte auf die Ladungen am Rand ist dann dem Betrage nach

$$(34.13) \quad k^* = \frac{1}{2} e n_e D E = \pi e^2 n_e^2 D^2,$$

wenn wir das in Gl. (34.7) gegebene elektrische Feld verwenden.

Läßt man die Elektronen jetzt los, so gilt bei vernachlässigter Reibung mit den Ionen die Bewegungsgleichung:

$$(34.14) \quad \rho^* \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} n_e m_e D \frac{d^2 D/2}{dt^2} = -\pi e^2 n_e^2 D^2$$

oder

$$(34.15) \quad \frac{d^2 D}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} D.$$

Mit dem Exponentialansatz:

$$(34.16) \quad D = \text{const.} \cdot \exp(i\omega t)$$

ergibt sich

$$(34.17) \quad \omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}.$$

Die so berechnete Frequenz

$$(34.18) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}$$

heißt die *Plasmafrequenz*. Mit ihr schwingen die beiden oben betrachteten

Flächenladungen von Elektronen durcheinander hindurch. Die charakteristische Zeit, mit der sich solch eine von Elektronen leergefegte Schicht wieder füllt, ist $2\pi/\omega_P$.

Mit der Plasmafrequenz ω_P haben wir eine Größe kennengelernt, die es in der gewöhnlichen Magnetohydrodynamik nicht gab. Erst durch das Zusammenwirken der beiden Plasmakomponenten, die nicht nur frei beweglich sind, sondern beide auch Trägheit besitzen und deshalb gegeneinander schwingen können, erhält man die neue Frequenz. Wir werden weiter unten (§ 39) die Plasmafrequenz als eine typische Frequenz für gewisse Schwingungsvorgänge im Plasma kennenlernen.

In Abb. 34.2 haben wir für eine Reihe von natürlichen und künstlichen Plasmen die zusammengehörigen Werte von Temperatur T und Elektronendichte n_e aufgetragen. Ebenfalls eingezeichnet sind die Plasmafrequenz $\omega_P \sim n_e^{1/2}$ und die Linien konstanter Debyelänge $D_0 \sim (T/n_e)^{1/2}$.

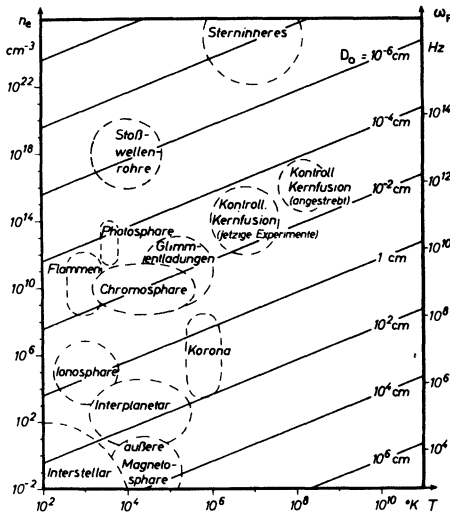


Abb. 34.2 Temperatur, Elektronendichte, Plasmafrequenz und Debyelänge für verschiedene Plasmen (nach Kertz 1971).

§ 35. Gravitationsfelder

Als wir in § 31 von den Bewegungsgleichungen (31.1), (31.2) für die beiden Komponenten zu den Gleichungen (31.38) und (31.40) übergangen, haben wir

kende Schwerkraft hinzu, etwa in der Näherung für kleine Geschwindigkeiten:

$$(35.1) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P + \rho \mathbf{g}.$$

Das folgt schon allein aus der Analogie zur gewöhnlichen Hydrodynamik, und der Leser kann den neu zur Bewegungsgleichung hinzutretenden Term leicht bestätigen, wenn er die Ableitung von Gl. (31.38) wiederholt.

Wiederholt man die Herleitung von Gl. (31.40) aus den Gln. (31.1) und (31.2), so tritt rechts noch das zusätzliche Glied

$$(35.2) \quad \frac{m_e}{e n_e} (Z n_i - n_e) \mathbf{g}$$

auf, das bei Quasineutralität verschwindet. Die Schwerkraft gibt also nur in der Bewegungsgleichung einen zusätzlichen Term. Aber in bezug auf die Quasineutralität muß man in Gegenwart von Gravitationsfeldern etwas vorsichtig sein.

a) Quasineutralität

Auf die Ionen wirkt wegen ihrer größeren Masse eine stärkere Gravitationskraft als auf die Elektronen. Befindet sich ein Plasma in einem abgeschlossenen, ruhenden Kasten, der unter der Einwirkung eines Gravitationsfeldes steht, so werden die Ionen das Bestreben haben, zu Boden zu sinken. Dieser Sedimentation wirken die elektrischen Kräfte zwischen den Teilchen entgegen, die die Quasineutralität zu erhalten versuchen (Abb. 35.1).

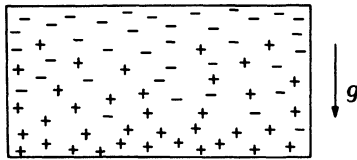


Abb. 35.1 Sedimentation der Ionen im äußeren Schwerfeld.

Um die Störung der Quasineutralität durch Gravitationsfelder etwas genauer zu studieren, gehen wir zurück auf die Bewegungsgleichungen (31.1) und (31.2) für die beiden Gaskomponenten und suchen eine statische Gleichgewichtslösung für verschwindendes Magnetfeld mit einem Gravitationsfeld \mathbf{g} . Die Gleichungen lauten dann

$$(35.3) \quad Z e n_i E - \nabla P_i + g m_i n_i = 0,$$

$$(35.4) \quad -e n_e E - \nabla P_e + g m_e n_e = 0.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit Z und subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander, so folgt

$$(35.5) \quad e (Z^2 n_i + n_e) E - \nabla (Z P_i - P_e) + g (Z n_i m_i - n_e m_e) = 0.$$

Die Temperatur des Plasmas sei räumlich konstant, dann folgt wegen

$$(35.6) \quad Z P_i = Z n_i k T, \quad P_e = n_e k T$$

die Beziehung

$$(35.7) \quad e (Z^2 n_i + n_e) E - k T \nabla (Z n_i - n_e) + g (Z n_i m_i - n_e m_e) = 0.$$

Was besagt diese Gleichung? $E = 0$, und $Z n_i - n_e = 0$ ist keine Lösung! Das Gravitationsfeld wirkt stärker auf die Ionen, dadurch kommt eine Ladungstrennung zustande. E , ∇n_i und ∇n_e verschwinden nicht mehr.

Wir wollen nun im Folgenden voraussetzen, daß die Quasineutralität durch das Gravitationsfeld nur wenig gestört sei, wir wollen also immer noch mit $Z n_i \approx n_e$ rechnen. Es bleibt dann

$$(35.8) \quad E = -g \frac{Z n_i m_i - n_e m_e}{e (Z^2 n_i + n_e)}.$$

Mit $Z n_i \approx n_e \approx n$ ergibt sich daraus wegen $m_i \gg m_e$

$$(35.9) \quad E = -g \frac{n (m_i - m_e)}{e n (Z+1)} = -g \frac{m_i}{e (Z+1)}.$$

Das ist das elektrische Feld, das der ladungstrennenden Wirkung des Gravitationsfeldes das Gleichgewicht hält. Wir wollen nun die Stärke der Raumladung abschätzen, die dieses elektrische Feld erzeugen. Dazu bilden wir die Divergenz der obigen Gleichung:

$$(35.10) \quad \nabla \cdot E = 4\pi\sigma = 4\pi e (Z n_i - n_e) = -\frac{m_i}{e(Z+1)} \nabla \cdot g.$$

Für eine im Weltraum befindliche Plasmawolke setzt sich die Gravitationsbeschleunigung g im allgemeinen zusammen aus der Eigengravitation g_0 der Wolke und aus dem äußeren Feld g_a , z. B. von nahegelegenen Sternen. Also ist $g = g_0 + g_a$. Diese Felder lassen sich darstellen als Gradient der zugehörigen Gravitationspotentiale

$$(35.11) \quad g = g_0 + g_a = - \nabla \psi_{s0} - \nabla \psi_{sa}.$$

Bei der Divergenzbildung gemäß Gl. (35.10) erhalten wir wegen der Poissongleichung für das Eigenfeld

$$(35.12) \quad - \nabla \cdot g_0 = \Delta \psi_{s0} = 4\pi G \rho$$

(wobei G die Gravitationskonstante ist), während die Divergenz des Fremdfeldes wegen der Laplacegleichung

$$(35.13) \quad - \nabla \cdot g_a = \Delta \psi_{sa} = 0$$

verschwindet, da sich die Quellen dieses Feldes außerhalb der Wolke befinden. Mit $\rho = n_i m_i$ folgt also aus Gl. (35.10) (Schlüter 1950)

$$(35.14) \quad \sigma = e (Z n_i - n_e) = G \frac{m_i^2 n_i}{e(Z+1)}.$$

Die Plasmawolke erhält also eine positive Raumladung, die allein von der Eigengravitation der Materie herrührt. Das Fremdfeld gibt keinen Beitrag! Als Maß für die Abweichung von der Neutralität wollen wir den Ausdruck $(Z n_i - n_e)/(Z n_i + n_e)$ benutzen. Mit Hilfe von Gl. (35.14) sehen wir, wie gering diese Raumladung ist:

$$(35.15) \quad \frac{Z n_i - n_e}{Z n_i + n_e} = \frac{Z n_i - n_e}{2 Z n_i} = \frac{G m_i^2}{2 Z (Z+1) e^2} \approx 10^{-37},$$

wobei man den Zahlenwert rechts erhält, wenn man $Z = 1$ und m_i gleich der Protonenmasse setzt. Auf 10^{37} Teilchen kommt also ein zusätzliches Ion, das zur positiven Aufladung beiträgt. Es reicht also schon eine ganz geringe Ladungstrennung aus, um die Wirkung des Gravitationsfeldes zu kompensieren.

Wenn sich außerhalb der Plasmawolke kein elektrisches Feld befinden soll, müssen sich entsprechend viele negative Ladungen auf ihrer Oberfläche ansammeln, um die positive Raumladung nach außen abzuschirmen (Abb. 35.2).

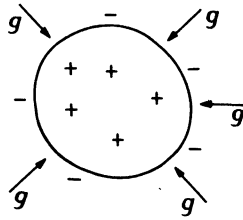


Abb. 35.2 Raum- und Oberflächenladung eines selbstgravitierenden Plasmas.

Die Sonne beispielsweise ist ein selbstgravitierender Plasmakörper. Die Zahl der zusätzlichen Ionen ist dann nach Gl. (35.15)

$$(35.16) \quad Z n_i - n_e \approx M_\odot / m_p \cdot 10^{-37} \approx 10^{19}.$$

Dabei ist $M_\odot = 2 \times 10^{33}$ g die Sonnenmasse und m_p die Protonenmasse ($Z = 1$). Diese 10^{19} Teilchen haben eine entsprechende negative Oberflächenladung der Sonne zur Folge. Da die Sonnenoberfläche ca. 10^{23} cm² beträgt, ergibt sich daraus eine Flächenladungsdichte von 1 Elektron/m². Der Effekt ist also sehr gering.

Wie wir oben sahen, trägt ein äußeres Gravitationsfeld nicht zur positiven Raumladung der Plasmawolke bei, wohl bewirkt es aber eine Sedimentation der schweren Ionen. Im Innern stellt sich ein elektrisches Feld gemäß Gl. (35.8) ein. Wenn außen wieder kein elektrisches Feld herrschen soll, erhalten wir zusätzlich eine positive Oberflächenladung auf der der anziehenden Masse zugewandten Seite der Plasmawolke (Abb. 35.3), auf der anderen Seite entsprechend negative Aufladung. Dieser Effekt ist abhängig von der Stärke des äußeren Gravitationsfeldes.

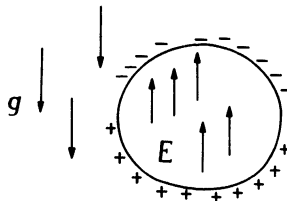


Abb. 35.3 Oberflächenladung einer in einem äußeren Schwerefeld ruhenden Plasmawolke.

Die durch die Gravitation im Plasma hervorgerufenen elektrischen Effekte sind in den betrachteten Fällen klein und daher bedeutungslos. Das liegt daran,

daß die Störung durch Gravitation durch elektrische Raumladungen kompensiert werden kann. Anders ist es, wenn keine solche Kompensation möglich ist.

b) Biermanns Batterie

Allgemein kann man für \mathbf{g}_a in Gl. (35.11) statt des Schwerfeldes natürlich auch ein beliebiges anderes Beschleunigungsfeld nehmen. In einem rotierenden Stern kann man beispielsweise \mathbf{g}_a gleich der Zentrifugalbeschleunigung setzen:

$$(35.17) \quad \mathbf{g}_a = \Omega^2 s \mathbf{e}_s.$$

Dabei ist s der Abstand von der Rotationsachse, \mathbf{e}_s der Einheitsvektor in s -Richtung und $\Omega = \Omega(s, z)$ die im allgemeinen vom Ort im Stern abhängige Winkelgeschwindigkeit. Gemäß unserer Gleichgewichtsbeziehung

$$(35.18) \quad \mathbf{E} = \text{const.} (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_a)$$

werden die Ionen dann zur Äquatorebene hin konzentriert. Im Fall einer statischen Lösung dieser Gleichung muß wegen $\nabla \times \mathbf{E} = \dot{\mathbf{B}} = 0$ das elektrische Feld also ein Potentialfeld sein ($\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \phi = 0$), also muß das auch für das Beschleunigungsfeld zutreffen:

$$(35.19) \quad \nabla \times \mathbf{g}_0 + \nabla \times \mathbf{g}_a = 0.$$

$\nabla \times \mathbf{g}_0 = \nabla \times \nabla \psi_{s0}$ verschwindet in jedem Fall, da das Schwerfeld konservativ ist. Aber verschwindet auch $\nabla \times \mathbf{g}_a$? \mathbf{g}_a hat nur eine s -Komponente, die jedoch von s und z abhängt. Betrachtet man den Ausdruck für die Rotation in Zylinderkoordinaten (Gl. (4.4)), so sieht man, daß $\nabla \times \mathbf{g}_a$ genau dann verschwindet, \mathbf{g}_a also ein konservatives Feld ist, wenn Ω nur von s abhängt. Es muß also $\Omega = \Omega(s)$ sein, d.h., die Winkelgeschwindigkeit muß konstant auf Zylindern sein. In diesem Fall gibt es eine statische Lösung.

Denken wir uns nun einen rotierenden Stern, dessen Winkelgeschwindigkeit Ω eine Funktion des Abstandes r vom Zentrum ist: $\Omega = \Omega(r)$. Dann ist nur im trivialen Fall der starren Rotation Ω auch gleichzeitig auf Zylindern konstant. In allen anderen Fällen müssen wir annehmen, daß Ω auf den Zylindern $s = \text{const}$ variiert. Dann ist die Fliehbeschleunigung nicht aus einem Potential herleitbar, das elektrische Feld kann die Fliehbeschleunigung nicht kompensieren, es ist kein statisches Gleichgewicht möglich. Die Ladungen müssen sich bewegen, meridionale Ströme treten auf, die wiederum toroidale Magnetfelder erzeugen. Dieser Mechanismus, der aus der differentiellen Rotation eines Sterns Strom gewinnt, wurde von L. Biermann (1950) gefun-

den. Er heißt in der englischen Literatur deshalb auch „Biermann's Battery“. Eine genaue Diskussion (Mestel, Roxburgh (1962)), zeigt, daß allerdings schon geringfügige anfängliche meridionale Magnetfelder den Effekt zunichte machen können.

§ 36. Makroskopische und mikroskopische Betrachtungsweise

In diesem Paragraphen wollen wir einige ganz einfache Lösungen der Plasmagleichungen kennenlernen. Wir wollen dabei zeigen, daß man Lösungen der Zweikomponententheorie auch in dem in Kapitel I behandelten Einteilchenbild beschreiben kann. Man muß aber dabei vorsichtig sein; die naive Anwendung der Ergebnisse der Theorie der Bewegung geladener Teilchen gibt oft Widersprüche mit der makroskopischen Zweikomponententheorie.

a) Plasma im homogenen Magnetfeld

Wir betrachten ein endlich ausgedehntes Plasma in einem homogenen Magnetfeld. Im mikroskopischen Einteilchenbild sehen wir die Ionen auf großen Kreisen links herum, die Elektronen auf kleinen Kreisen rechts herum um die Feldlinien gyrieren (Abb. 36.1 a). Betrachtet man die Gyrationbahnen, so sieht man, daß alle Gyrationbewegungen der Ionen am Rande einen Strom in einheitlicher Richtung ergeben; die Folge wäre also ein makroskopischer Strom der das Plasma im Umlaufsinn der Ionen umfließt. Im Innern heben sich die Wirkungen der gyrierenden Ionen auf. Die Elektronen liefern wegen ihres entgegengesetzten Ladungsvorzeichens und entgegengesetzten Umlaufsinnes Strom in dieselbe Richtung (Abb. 36.1 b).

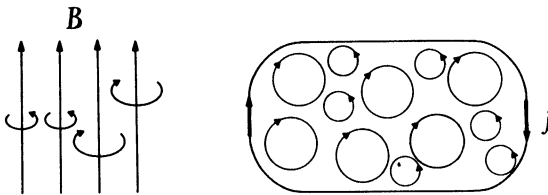


Abb. 36.1 Gyrierende Elektronen und Ionen in einem homogenen Magnetfeld (im rechten Bild senkrecht auf der Zeichenebene stehend) ergeben einen Strom an der Oberfläche des Plasmas.

Im makroskopischen Bild der Zweikomponententheorie hingegen sieht man sofort, daß

$$(36.1) \quad B = \text{const.}, \quad j = 0, \quad E = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad P = \text{const.}$$

eine Lösung der Gleichungen (32.1) und (32.3) ist. Im Gegensatz zum mikroskopischen Bild fließt im makroskopischen Bild kein Strom.

Wie kann man diesen Widerspruch klären? Der Fehler liegt darin, daß im mikroskopischen Bild die Randbedingungen für das endlich ausgedehnte Plasma nicht berücksichtigt sind. Um das Plasma auf ein endliches Raumgebiet zu beschränken, muß man es beispielsweise in einen starren Kasten einschließen. An den Kastenwänden werden dann jedoch die Teilchen reflektiert und können dort ihre Gyrationbewegung nicht mehr ungestört ausführen. Betrachten wir der Einfachheit halber alle die Elektronen, deren Gyrationen gerade in der Kastenwand liegen, so erhalten wir in der Nähe der Oberfläche einen dem ersten Strom entgegengesetzten Strom (Abb. 36.2). Die an die Kastenwand ebenfalls stoßenden Ionen bewirken einen Strom in dieselbe Richtung; auf diese Weise wird der eingangs eingeführte Strom gerade kompensiert. Die mikroskopische Theorie liefert dann auch eine Lösung mit $j = 0$.

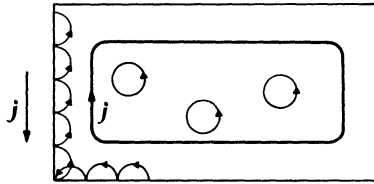


Abb. 36.2 Lösung des Widerspruchs durch Berücksichtigung der an der Kastenwand reflektierten Teilchen.

b) Elektronengas im homogenen elektrischen und magnetischen Feld

Ein ähnlicher Widerspruch kommt zustande, wenn man die Bewegung eines Elektronengases im homogenen Magnetfeld mit einem senkrecht dazu stehenden homogenen elektrischen Feld betrachtet. Innerhalb der mikroskopischen Theorie führen die Elektronen zusätzlich zur Gyration eine Driftbewegung senkrecht zu E und B aus. Nach Gl. (3.5) gilt für die Driftgeschwindigkeit

$$(36.2) \quad \mathbf{v}_D = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Wir erhalten also einen Strom in Richtung $-\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Das sieht in der makroskopischen Theorie wieder ganz anders aus: Nach § 31 lautet die Bewegungsgleichung für die Elektronen:

$$(36.3) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla P_e - e n_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}).$$

Eine stationäre Lösung dieser Gleichung ist $P_e = \text{const.}$, $\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}/c = 0$, wie man durch Einsetzen in Gl. (36.2) direkt bestätigen kann. Man erhält dann in Übereinstimmung mit der mikroskopischen Betrachtungsweise eine Bewegung mit $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_D$.

Aber auch

$$(36.4) \quad \mathbf{v}_e = 0, \quad \nabla P_e = -e n_e \mathbf{E}$$

ist eine Lösung. In diesem Fall ruhen die Elektronen, und wir bekommen einen Widerspruch zur mikroskopischen Theorie. Wegen $P_e = n_e kT$ wird

$$(36.5) \quad P_e = P_{e0} \cdot \exp\left(\frac{-e}{kT} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}\right), \quad n_e = n_{e0} \cdot \exp\left(\frac{-e}{kT} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}\right)$$

(P_{e0} , n_{e0} sind Integrationskonstanten). Das ist die barometrische Höhenformel. Das Magnetfeld geht dabei gar nicht ein. Wir erhalten einen Dichtegradienten in entgegengesetzter Richtung zum elektrischen Feld.

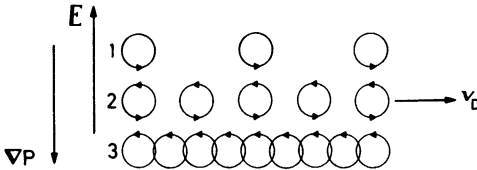


Abb. 36.3 Ein Elektronengas in einem äußeren elektrischen Feld hat einen nicht-verschwindenden Dichte- und Druckgradienten. Während die Gyrationen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_D nach rechts driften, ist die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen im Mittel gleich Null, deshalb gibt es keinen Strom.

Im mikroskopischen Bild haben wir also eine Drift des Elektronengases, im makroskopischen Bild nicht. Der Widerspruch kommt daher, daß man zwischen der Drift der Gyrationen und der makroskopischen Geschwindigkeit der Elektronen unterscheiden muß. Den Unterschied zeigt Abb. 36.3. Dort sind die Gyrationen in drei Ebenen konstanten Druckes eingezeichnet. Dabei ist berücksichtigt, daß die Dichte der Elektronen in Richtung ∇P zunimmt; wir haben in den einzelnen Ebenen verschieden viele gyrierende Elektronen eingezeichnet. Alle Elektronen führen die einheitliche Driftbewegung \mathbf{v}_D aus. Wir setzen uns jetzt etwa in die Mitte zwischen die Ebenen 2 und 3 in Abb. 36.3. Dann bewegen sich zwar alle Gyrationen nach rechts, da aber in Ebene 3 mehr Gyrationen liegen, haben an unserem Beobach-

tungspunkt mehr Elektronen ihre Gyrationgeschwindigkeit entgegen der Driftbewegung. Das kompensiert die Drift der Gyrationzentren, und der Massstrom ist im Mittel null. Die Welt ist wieder in Ordnung.

c) Plasma in gekreuzten Feldern

Jetzt betrachten wir denselben Fall wie in b), nehmen aber statt des Elektronengases ein quasineutrales Plasma. Statt einfach nach einer stationären Lösung der zugehörigen Gleichungen (32.1)–(32.6) zu suchen, wollen wir zunächst diskutieren, was der Reihe nach passiert, wenn das elektrische Feld zu dem bereits vorhandenen magnetischen Feld hinzugeschaltet wird.

Im Anfangszustand seien $\mathbf{v} = \mathbf{j} = 0$ und $P = \text{const.}$ Legt man zu dem vorhandenen homogenen Magnetfeld \mathbf{B} ein dazu senkrechtes homogenes elektrisches Feld \mathbf{E} an, so liefert das Ohmsche Gesetz (32.3) (das bisher trivial erfüllt wurde, weil alle Glieder einzeln verschwanden) über den Strombeschleunigungsterm einen Strom \mathbf{j} , der senkrecht zu \mathbf{B} fließt. Wegen $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \neq 0$ entsteht dann in der Bewegungsgleichung (32.1) eine Beschleunigung. Die Materie setzt sich also in Richtung $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ in Bewegung. Folglich ergibt sich ein nichtverschwindender Term $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ antiparallel zu \mathbf{E} (vgl. Abb. 36.4).

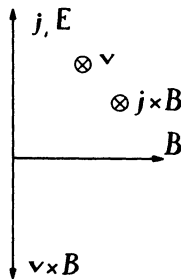


Abb. 36.4 Lage der Vektoren im Fall $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (das Zeichen \otimes deutet an, daß das Feld $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ in die Zeichenebene hineinweist).

Das Glied $\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ im Ohmschen Gesetz wirkt dem ursprünglichen elektrischen Feld entgegen. Nach einiger Zeit gibt es eine stationäre Lösung, bei der sich diese beiden Terme gerade kompensieren, also

$$(36.6) \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{v} = \text{const.}, \quad P = \text{const.}$$

Im Ruhssystem der Materie ist das elektrische Feld gerade wegtransformiert, die Situation entspricht genau der Drift von geladenen Teilchen im elektrischen

Feld in der Einteilchen-Beschreibung. Wir haben denselben Fall wie beim homogenen Elektronengas.

Die anfangs ruhende Materie setzt sich also senkrecht zu E und B in Bewegung, es handelt sich quasi um die Umkehrung des Hall-Effektes. Im Rahmen der Hartmann-Strömung (§ 20) haben wir dieses Problem auch schon von der anderen Seite her kennengelernt: So wie sich prinzipiell mit dem dort gezeigten Mechanismus ein magnetohydrodynamischer Generator bauen läßt (Umwandlung von mechanischer Bewegungsenergie in elektrische Energie), kann man hier mit dem umgekehrten Effekt eine „Plasmakanone“ bauen. Man denke sich einen mit Plasma gefüllten Plattenkondensator mit einem Magnetfeld B parallel zu den Platten. Bei plötzlicher Einschaltung des elektrischen Feldes ($E \perp B$) schießt das Plasma seitlich aus dem Kondensator heraus ($v \perp E$, $v \perp B$).

§ 37. Wirbelsätze

In der Magnetohydrodynamik fanden wir als eine der wichtigsten Erscheinungen die bei unendlicher Leitfähigkeit in der Materie eingefrorenen Feldlinien. Der magnetische Fluß durch eine geschlossene Linie, die mit der Materie mitströmt, blieb konstant. In der Zweikomponententheorie bleibt das nur noch angenähert richtig. Das sieht man besonders schön mit Hilfe der von Schlüter (1959) hergeleiteten *Wirbelsätze*.

Wir betrachten dazu ein besonders einfaches Plasma, das einer Zustandsgleichung der Form $\rho = \rho(P)$ genügen möge. Insbesondere sind darin auch die Zustandsgleichung $\rho = \text{const.}$ (inkompressible Flüssigkeit) und der Fall der Isothermie ($P = \text{const.} \cdot \rho$) eingeschlossen. Weiter möge der Strombeschleunigungsterm $\partial j / \partial t$ vernachlässigt werden können, d.h., der Strom soll sich in Zeiten, die kurz gegen die Stoßzeiten der Teilchen sind, nicht ändern. Schließlich sei die Leitfähigkeit unendlich. Mit diesen Annahmen lautet das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$(37.1) \quad E + \frac{1}{c} v \times B - \frac{\alpha}{\rho c} j \times B + \frac{\alpha Z}{\rho(Z+1)} \nabla P = 0,$$

wobei $\alpha = m_i / Z e = \rho / e n$ ist.

Von dieser Gleichung wollen wir die Rotation bilden. Wegen der Identität

$$(37.2) \quad \nabla \times (u a) = u \nabla \times a + \nabla u \times a$$

und $\nabla \times \nabla P = 0$ ergibt sich aus dem letzten Term der Gl. (37.1)

$$(37.3) \quad \nabla \times \frac{\alpha Z}{\rho(Z+1)} \nabla P = \frac{\alpha Z}{Z+1} \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla P.$$

Da wir jedoch eine Zustandsgleichung der Form $\rho = \rho(P)$ vorausgesetzt haben, sind die Flächen $\rho = \text{const.}$ auch gleichzeitig Flächen $P = \text{const.}$ Die Gradienten von ρ und P sind also parallel, und das Vektorprodukt auf der rechten Seite von Gl. (37.3) verschwindet. Es bleibt von Gl. (37.1) übrig

$$(37.4) \quad - \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\alpha}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right).$$

Mit der Maxwell-Gleichung $-c \nabla \times \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ folgt daraus

$$(37.5) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\left(\mathbf{v} - \frac{\alpha}{\rho} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} \right].$$

In der magnetohydrodynamischen Theorie erhielten wir eine ganz ähnliche Gleichung (Gl. (10.13) für $\lambda \rightarrow \infty$), nämlich

$$(37.6) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Sie besagte, daß der magnetische Fluß durch eine mit dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} mitgeführte geschlossene flüssige Linie konstant ist (vgl. § 10). Allgemein gilt: Immer wenn für ein Vektorfeld \mathbf{a} , das der Beziehung $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ gehorcht, eine Gleichung der Form

$$(37.7) \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a})$$

gilt, ist das Feld \mathbf{a} im Strömungsfeld \mathbf{w} eingefroren. (Der Beweis ist genau derselbe wie in § 10, wenn wir dort $\mathbf{a} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ setzen.) Damit können wir jetzt aus der Gültigkeit der Gleichung (37.5) schließen, daß das Magnetfeld im Strömungsfeld $\mathbf{v} - \alpha \mathbf{j} / \rho$ eingefroren ist. Mit anderen Worten, der magnetische Fluß durch eine mit diesem Geschwindigkeitsfeld mitgeführte geschlossene Linie ist konstant. Jetzt sind die Feldlinien nicht mehr im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} der Materie eingefroren, sondern in einem fiktiven Strömungsfeld $\mathbf{v} - \alpha \mathbf{j} / \rho$, das selbst keine einfache physikalische Bedeutung hat.

Deshalb liegt es nahe, zu fragen, ob es statt des Magnetfeldes ein anderes Vektorfeld gibt, das im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} eingefroren ist. Das gibt es tatsächlich! Wir setzen

$$(37.8) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

in die Bewegungsgleichung ein und erhalten

$$(37.9) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\rho} \nabla P.$$

Dividieren wir Gl. (37.1) durch α und addieren sie zu Gl. (37.9), so erhalten wir

$$(37.10) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha} \cdot (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\rho(Z+1)} \nabla P.$$

Bilden wir die Rotation von diesem Ausdruck, so fällt nach den obigen Überlegungen der letzte Term rechts wieder fort. Definieren wir weiterhin mit

$$(37.11) \quad \mathbf{W} = \nabla \times \mathbf{v}$$

die *Wirbelstärke* der Strömung, so ergibt sich

$$(37.12) \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{W}) + \frac{1}{\alpha} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\alpha c} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

und aus $-c \nabla \times \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ folgt schließlich

$$(37.13) \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{W}) + \frac{1}{\alpha c} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

oder

$$(37.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{W} + \frac{1}{\alpha c} \mathbf{B}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{W} + \frac{1}{\alpha c} \mathbf{B})].$$

Außerdem ist

$$(37.15) \quad \nabla \cdot (\mathbf{W} + \frac{1}{\alpha c} \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0,$$

also haben wir den in Gl. (37.7) ausgedrückten Fall. Ein Vergleich von Gl. (37.14) mit Gl. (37.7) zeigt, daß im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} die Größe $\mathbf{W} + \mathbf{B}/\alpha c$ eingefroren ist. Für $\mathbf{B} = 0$ bedeutet das, daß das Wirbelfeld $\mathbf{W} = \nabla \times \mathbf{v}$ eingefroren ist. Das ist ein in der Hydrodynamik altbekanntes

Wirbelsatz. Analog bezeichnen wir Gl. (37.14) als den *Wirbelsatz der Zweikomponententheorie*.

Die Zweikomponententheorie hat uns einen Satz geliefert, der die Bedingung der eingefrorenen Feldlinien der Magnetohydrodynamik und die Bedingung der eingefrorenen Wirbellinien der Hydrodynamik als Grenzfälle enthält. Den Grenzfall der eingefrorenen Wirbellinien erhält man, wenn das Magnetfeld verschwindet. Wann erhält man den Grenzfall der eingefrorenen Feldlinien? Wann also ist W dem Betrag nach klein im Vergleich zu $B/\alpha c$? Die Größe $B/\alpha c$ hat die Dimension einer Frequenz, und es gilt

$$(37.16) \quad \left| \frac{B}{\alpha c} \right| = \frac{Z e B}{m_i c} = \omega_{gi}.$$

ω_{gi} ist die Gyrationfrequenz der Ionen. $|W|$ ist eine Art lokaler Rotationsfrequenz. Wenn nämlich die Wirbelstärke nicht verschwindet, dann führt die Flüssigkeit an jeder Stelle eine Drehbewegung aus, der man gemäß der bei starrer Rotation gültigen Beziehung

$$(37.17) \quad 2 \Omega = |\nabla \times \mathbf{v}| = |W|$$

eine Winkelgeschwindigkeit Ω zuordnen kann. Die Bedingung der eingefrorenen Feldlinien ist also dann gut erfüllt, wenn die lokale Winkelgeschwindigkeit Ω klein ist im Vergleich zur Gyrationfrequenz der Ionen.

Wir betrachten als Beispiel das Plasma in der Ionosphäre. Die Gyrationfrequenz der Ionen im Erdmagnetfeld beträgt einige Kilohertz, während $|W| \approx 1$ (Tag)⁻¹ ist. W ist also zu vernachlässigen; das Magnetfeld ist eingefroren.

Ist die Voraussetzung $\rho = \rho(P)$ nicht mehr erfüllt, gilt der Wirbelsatz (37.14) nicht mehr. Dann kann selbst bei unendlicher Leitfähigkeit magnetischer Fluß erzeugt werden, ein Effekt, der in der Magnetohydrodynamik noch nicht auftauchte. Im allgemeinen ist die Flußerhaltung dadurch aber nur geringfügig verletzt.

Kapitel VII

WELLEN IN DER ZWEIKOMPONENTENTHEORIE

§ 38. Plasmaschwingungen

So wie wir in § 22 Wellenphänomene in der magneto hydrodynamischen Näherung untersucht haben, indem wir kleine Schwingungen um eine magneto hydrostatische Lösung betrachteten, so wollen wir jetzt die Gleichungen der Zweikomponententheorie benutzen, um Wellenphänomene zu studieren. Wir gehen wieder von einem einfachen Zustand aus:

$$(38.1) \quad \mathbf{v} = 0, \quad E = 0, \quad j = 0.$$

Bezeichnen wir die Größen dieses Gleichgewichtszustandes mit dem Index 0 , so folgt

$$(38.2) \quad \begin{aligned} \nabla P_0 &= 0, & \nabla \times \mathbf{B}_0 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, & \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen ferner im Gleichgewicht Isothermie annehmen, dann folgt aus der räumlichen Konstanz des Druckes auch

$$(38.3) \quad \nabla \rho_0 = 0.$$

Da wir kleine Störungen betrachten, im besonderen also die Geschwindigkeit klein sein soll, können wir uns auf die Form (32.1) bis (32.7) unserer Gleichung der Zweikomponententheorie beschränken, bei deren Herleitung kleine Geschwindigkeiten vorausgesetzt waren. Die Leitfähigkeit nehmen wir als unendlich an. Bezeichnen wir in Anlehnung an Gleichung (22.1) die Störungen mit dem Index 1 , setzen wir also an:

$$(38.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad P = P_0 + P_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{m_1}{Z} (n_0 + n_1), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1, \quad E = E_1, \quad j = j_1, \end{aligned}$$

dann erhalten wir durch Linearisierung das folgende System

$$(38.5) \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 - \nabla P_1,$$

$$(38.6) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0,$$

$$(38.7) \quad \frac{m_e}{e^2 n_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 - \frac{1}{ec n_0} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \frac{Z}{e n_0 (Z+1)} \nabla P_1,$$

$$(38.8) \quad c \nabla \times \mathbf{B}_1 = 4\pi \mathbf{j}_1 + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t},$$

$$(38.9) \quad c \nabla \times \mathbf{E}_1 = - \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t},$$

$$(38.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0.$$

Hierbei ist n_0 die Elektronendichte des ungestörten Zustandes, die mit ρ_0 durch

$$(38.11) \quad \rho_0 = n_{i0} m_i = n_0 m_i / Z$$

zusammenhängt. Wir haben damit ein homogenes Gleichungssystem für die Störgrößen $\mathbf{v}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{E}_1, \rho_1$ und P_1 . Die Gleichung (38.7) läßt sich umformen, wenn wir die schon früher in § 34 b definierte Plasmafrequenz ω_p einführen:

$$(38.12) \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}.$$

Dann ist

$$(38.13) \quad \frac{m_e}{e^2 n_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = \frac{4\pi}{\omega_p^2} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t}.$$

Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, daß das Magnetfeld homogen, also $\mathbf{B}_0 = \text{const.}$ sei. Dann sind alle Koeffizienten in dem Gleichungssystem (38.5) bis (38.10) konstant, und wir können einen Exponentialansatz machen:

$$(38.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \tilde{\mathbf{v}} \psi, & P_1 &= \tilde{P} \psi, & \mathbf{B}_1 &= \tilde{\mathbf{B}} \psi, \\ E_1 &= \tilde{E} \psi, & \mathbf{j}_1 &= \tilde{\mathbf{j}} \psi, & \rho_1 &= \tilde{\rho} \psi \end{aligned}$$

mit

$$(38.15) \quad \psi = \exp [i(\omega t - \mathbf{l} \cdot \mathbf{r})],$$

dabei sind die neu eingeführten Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{E}, \tilde{\mathbf{j}}$ und die Skalare $\tilde{P}, \tilde{\rho}$ räumlich und zeitlich konstant. Möglicherweise wird beim Lösen unseres Gleichungssystems der eine oder andere dieser Vektoren und Skalare komplex sein; die reellen Lösungen des Systems erhalten wir dann aus den Realteilen von $\mathbf{v}_1, P_1, \mathbf{B}_1, \dots$. Der Exponentialansatz (38.15) stellt ebene Wellen dar, \mathbf{l} ist der Wellenvektor. Die Phase der Welle ist konstant auf Ebenen senkrecht zu \mathbf{l} . Aus dem Ansatz (38.15) ergeben sich folgende Rechenregeln für Differentialoperatoren

$$(38.16) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = i\omega \rho_1, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = i\omega \mathbf{v}_1, \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} = i\omega E_1,$$

$$(38.17) \quad \nabla P_1 = -i\mathbf{l} P_1,$$

$$(38.18) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = -i\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = -i\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_1,$$

$$(38.19) \quad \nabla \times \mathbf{B}_1 = -i\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1, \quad \nabla \times E_1 = -i\mathbf{l} \times E_1,$$

wovon man sich sofort durch Einsetzen überzeugt. Allgemein läßt sich sagen, daß die beiden Differentialoperatoren $\nabla, \partial/\partial t$ formal dem Vektor \mathbf{l} und der Frequenz ω entsprechen:

$$(38.20) \quad \nabla = -i\mathbf{l}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega.$$

Geht man damit in unsere Schwingungsgleichungen, so erhält man nunmehr ein System algebraischer Gleichungen:

$$(38.21) \quad i\omega \rho_0 \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0 + i\mathbf{l} \tilde{P},$$

$$(38.22) \quad i\omega \tilde{\rho} = i\rho_0 \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{v}},$$

$$(38.23) \quad i \frac{4\pi}{\omega_p^2} \omega \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_0 - \frac{\alpha}{\rho_0 c} \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0 - \frac{iZ}{Z+1} \cdot \frac{\alpha}{\rho_0} l \tilde{\mathbf{P}},$$

$$(38.24) \quad -i c l \times \tilde{\mathbf{B}} = 4\pi \tilde{\mathbf{j}} + i \omega \tilde{\mathbf{E}},$$

$$(38.25) \quad c l \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mathbf{B}},$$

$$(38.26) \quad l \times \tilde{\mathbf{B}} = 0.$$

Dabei haben wir wieder die Konstante

$$(38.27) \quad \alpha = \frac{\rho_0}{e n_0} = \frac{m_i}{Z e}$$

eingeführt. Die Gl. (38.26) ist eine Folge von Gl. (38.25), sie kann also fortgelassen werden. Insgesamt haben wir dann noch vier Vektorgleichungen und eine skalare Beziehung. Als Unbekannte haben wir die Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und die Skalare \tilde{P} , $\tilde{\rho}$, die noch zusätzlich durch eine skalare Zustandsgleichung verknüpft sind. Wenn man auch die Zustandsgleichung linearisiert, hat man ein homogenes lineares Gleichungssystem mit ebensovielen Gleichungen wie Unbekannten. Nicht-triviale Lösungen sind nur möglich, wenn die Determinante verschwindet. Das gibt uns eine Beziehung zwischen l und ω , die *Dispersionsrelation*. Wenn zu vorgegebenem l die Frequenz ω aus der Dispersionsrelation bestimmt wird, dann läßt sich für l und ω das System lösen, und man kann die Störgrößen $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, \tilde{P} , $\tilde{\rho}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmen.

§ 39. Wellen im Plasma ohne Magnetfeld

Wir untersuchen hier und in den folgenden Paragraphen das in § 38 aufgestellte System der Wellengleichungen der Zweikomponententheorie in einigen speziellen Fällen. Besonders einfach wird alles, wenn wir annehmen, daß im Gleichgewicht kein Magnetfeld vorhanden ist. Dann folgt aus Gl. (38.23)

$$(39.1) \quad i \frac{4\pi\omega}{\omega_p^2} \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{E}} - i \frac{\alpha}{\rho_0} l \tilde{\mathbf{P}}_e.$$

Dabei haben wir in dem vom Druckdiffusionsterm herrührenden Glied den Elektronendruck benutzt, wie er in der ursprünglichen Form (31.40) des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes auftrat. Das erweist sich hier als zweckmä-

fig, weil wir uns mit Schwingungen befassen werden, bei denen die Bewegung der Elektronenkomponente vorherrscht.

Aus Gl. (38.24) folgt

$$(39.2) \quad 4\pi \tilde{\mathbf{j}} = -i\omega \tilde{\mathbf{E}} - ic \mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{B}},$$

und aus Gl. (38.25) erhalten wir

$$(39.3) \quad \mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{B}}.$$

a) Longitudinale Wellen

Wir nehmen im Folgenden an, daß \mathbf{l} und $\tilde{\mathbf{E}}$ parallel sind, betrachten also longitudinale elektrische Wellen. Dann folgt aus Gleichung (39.3), daß die Störung des Magnetfeldes verschwindet. Multipliziert man Gl. (39.1) skalar mit \mathbf{l} , dann folgt

$$(39.4) \quad i \frac{4\pi\omega}{\omega_p^2} \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{E}} - i \frac{\alpha}{\rho_0} \tilde{P}_e l^2.$$

Andererseits folgt aus Gl. (39.2) durch skalare Multiplikation mit \mathbf{l}

$$(39.5) \quad 4\pi \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{j}} = -i\omega \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{E}}.$$

Also erhalten wir durch Einsetzen von Gl. (39.4) in Gl. (39.5)

$$(39.6) \quad \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right) \mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + i \frac{\alpha}{\rho_0} \tilde{P}_e l^2 = 0.$$

Hieraus folgt bereits, daß im Falle verschwindenden Elektronendruckes, also etwa wenn man ein kaltes Plasma hat, die Schwingung mit der Frequenz $\omega = \pm \omega_p$ erfolgt.

Wir wollen aber hier den allgemeineren Fall betrachten. Dazu müssen wir uns erst noch mit der Druckstörung befassen. Wir nehmen an, die Elektronen genügen der Zustandsgleichung eines idealen Gases. Die Bewegung der Ionen wollen wir vernachlässigen. Wir betrachten nur den eindimensionalen Fall, d.h., alle Bewegungen sollen nur in die \mathbf{l} und $-\mathbf{l}$ Richtung erfolgen. Das gilt auch für die thermische Bewegung der Elektronen, die also nur einen Freiheitsgrad besitzen sollen. Wir wollen ferner annehmen, daß sich das Elektronengas adiabatisch ändern möge. Dann gilt für den Elektronendruck

$$(39.7) \quad \frac{P_{e1}}{P_{e0}} = \gamma \frac{n_{e1}}{n_{e0}}$$

Im Fall von f Freiheitsgraden gilt $\gamma = (2+f)/f$. Hier ist $f = 1$, also $\gamma = 3$, und wir haben

$$(39.8) \quad \frac{P_{e1}}{P_{e0}} = 3 \frac{n_{e1}}{n_{e0}}$$

Es ist also

$$(39.9) \quad P_{e1} = \frac{3 n_{e1} P_{e0}}{n_{e0}} = 3 n_{e1} k T_0$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist. Da die Elektronendichte gestört wird, die Ionendichte aber nicht, müssen Raumladungen auftreten. Es war $\sigma_0 = 0$ (vgl. §§31 u. 32), die Störung σ_1 von σ wird dann

$$(39.10) \quad \sigma_1 = -e n_{e1}.$$

Nun folgt aus der Maxwellschen Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma$ die Beziehung

$$(39.11) \quad i l \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi e n_{e1},$$

wobei wir für n_{e1} einen Exponentialansatz gemäß Gl. (38.14) und (38.15) gemacht haben. Damit ergibt sich aus Gl. (39.9)

$$(39.12) \quad \tilde{P}_e = i \frac{3 k T_0}{4\pi e} l \cdot \tilde{\mathbf{E}}.$$

Gehen wir damit in die Gl. (39.6), so folgt

$$(39.13) \quad \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = 1 + \frac{\alpha}{\rho_0} \frac{3 k T_0}{4\pi e} l^2$$

und mit den Definitionen von ω_p und α

$$(39.14) \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3 k T_0}{m_e} l^2.$$

Das ist die Dispersionsrelation für longitudinale Wellen in einem Plasma der Temperatur T_0 bei verschwindendem Magnetfeld. Für $T_0 \rightarrow 0$ geht ω gegen ω_p . Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Wellen ist

$$(39.15) \quad v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{l} = \left(\frac{\omega_{\text{P}}^2}{l^2} + \frac{3 k T_0}{m_e} \right)^{1/2},$$

und die Gruppengeschwindigkeit folgt durch Differentiation:

$$(39.16) \quad v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dl} = \frac{3 k T_0}{m_e} l \left(\omega_{\text{P}}^2 + \frac{3 k T_0}{m_e} l^2 \right)^{-1/2}.$$

Für hohe Temperaturen und kleine Wellenlängen überwiegt der zweite Term in Gl. (39.14). Wir bekommen dann nach Gl. (35.15) für die Gruppengeschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$(39.17) \quad v_{\text{ph}}^2 = v_{\text{gr}}^2 = \frac{3 k T_0}{m_e} = \frac{3 n_e k T_0}{n_e m_e} = \frac{3 P_e}{\rho_e},$$

wobei ρ_e die Dichte der Elektronenkomponente bezeichnet. Gl. (39.17) ist aber gerade die Beziehung für die Schallgeschwindigkeit v_s in einem Gas

$$(39.18) \quad v_s^2 = \frac{\gamma \cdot P}{\rho}.$$

Als Grenzfall hoher Temperaturen und kleiner Wellenlänge erhalten wir also Schallausbreitung in Elektronengas (hier ist $\gamma = 3$, da wir nur einen Freiheitsgrad berücksichtigt haben).

b) Transversale Wellen

Wir nehmen jetzt an, daß der Wellenvektor \mathbf{l} senkrecht auf dem elektrischen Feld \mathbf{E} stehe. Ferner soll $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ sein. Dann ist wegen Gl. (38.22) auch $\tilde{\rho} = 0$ und damit auch $\tilde{\mathbf{P}} = 0$. Wenn wir dann Gleichung (38.25) vektoriell mit \mathbf{l} multiplizieren, erhalten wir zusammen mit Gl. (39.3) und (38.24)

$$(39.19) \quad \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{\omega}{c} \mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c} \left(\frac{4\pi}{i c} \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}} \right).$$

Nun gilt die Identität

$$(39.20) \quad \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{E}}) \equiv \mathbf{l} (\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{E}} l^2,$$

und wir erhalten wegen $\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = 0$ zusammen mit der Gl. (38.23) und wegen $\mathbf{B}_0 = 0$, $\tilde{\mathbf{P}} = 0$

$$(39.21) \quad (c^2 l^2 - \omega^2) \tilde{\mathbf{E}} = -4\pi i \omega \tilde{\mathbf{j}} = -\omega_p^2 \tilde{\mathbf{E}}.$$

Damit folgt für die Dispersionsrelation

$$(39.22) \quad c^2 l^2 - \omega^2 + \omega_p^2 = 0.$$

Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} ist demnach gegeben durch

$$(39.23) \quad v_{\text{ph}}^2 = \frac{\omega^2}{l^2} = \frac{\omega^2 c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{c^2}{1 - \omega_p^2/\omega^2},$$

für die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} erhält man

$$(39.24) \quad v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dl} = c \left| 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right|^{-1/2}.$$

Wir beschränken uns zuerst auf den Fall $\omega > \omega_p$: dann folgt, daß die Phasengeschwindigkeit größer ist als die Lichtgeschwindigkeit, die Gruppengeschwindigkeit dagegen (Gott sei Dank!) kleiner. Allgemein folgt aus Gl. (39.23) und (39.24)

$$(39.25) \quad v_{\text{ph}} \cdot v_{\text{gr}} = c^2.$$

In Analogie zur Optik können wir einen *Brechungsindex* N definieren:

$$(39.26) \quad N = \frac{c}{v_{\text{ph}}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

Wenn die Frequenz ω groß gegenüber der Plasmafrequenz ist, gehen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in die Lichtgeschwindigkeit über, und der Brechungsindex wird gleich 1. In der Tat stellen unsere Transversalwellen elektromagnetische Wellen im Plasma dar. Wie man aus Gl. (38.25) sieht, folgt die bekannte Beziehung für die Amplitudenvektoren elektromagnetischer Wellen:

$$(39.27) \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{c}{\omega} \mathbf{l} \times \tilde{\mathbf{E}}.$$

Wir finden aber bereits jetzt wesentliche Unterschiede gegenüber der Wellenausbreitung im Vakuum. Das Plasma ist ein dispergierendes Medium; Wellen verschiedener Frequenz haben verschiedene Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Ein elektromagnetisches Signal, das in verschiedenen Frequenzen gleich-

zeitig ausgesandt wird, erreicht den Beobachter zu verschiedenen Zeiten. Wir werden im § 40 sehen, daß das interstellare Plasma auf diese Weise die Radiopulse der Pulsare beeinflußt.

Was wird, wenn $\omega < \omega_p$ ist? Wir denken uns im Plasma einen Sender der Frequenz $\omega < \omega_p$. Dann folgt aus Gl. (39.22), daß I imaginär ist. Aus unserem Exponentialansatz (38.15) folgt also, daß das elektromagnetische Wechselfeld eine stehende Welle darstellt, deren Amplitude mit dem Abstand vom Sender exponentiell abfällt. Eine gleichfalls mögliche stehende Welle, deren Amplitude exponentiell mit dem Abstand steigt, können wir im Fall des unendlich ausgedehnten Plasmas wegen der Singularität im Unendlichen ausschließen. Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz gibt es also überhaupt keine Ausbreitung. Der Brechungsindex $N = c/v_{ph}$ wird imaginär. Bei Ausbrüchen auf der Sonne, bei denen elektromagnetische Wellen entstehen, kommen nur immer solche Frequenzen zu uns, die oberhalb der dortigen lokalen Plasmafrequenz liegen. Wir werden dieses Phänomen in § 41 behandeln.

§ 40. Die Frequenzdrift der Pulsarsignale

Gleich bei der Entdeckung der Pulsare im Jahre 1968 stellte man fest, daß ihre scharfen Radiopulse in verschiedenen Frequenzen zu verschiedenen Zeiten ankommen. Die Erscheinung ist in Abb. 40.1 wiedergegeben. Das Signal kommt in der niedrigeren Frequenz später an als in der höheren. Da man annehmen muß, daß der Puls in allen Frequenzen gleichzeitig ausgesandt wird, muß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals von der Frequenz abhängen. Das ist nach Gl. (39.24) in der Tat zu erwarten. Aus Gl. (34.18) folgt nach Einsetzen der Zahlwerte für die Naturkonstanten

$$(40.1) \quad \omega_p^2 = 3 \times 10^9 \cdot n_e.$$

Nehmen wir die Elektronendichte zu 0.1 cm^{-3} an, so folgt $\omega_p \approx 1.8 \times 10^4$. Für sichtbares Licht ist $\omega \approx 10^{15}$, gemäß Gl. (39.24) ist die Gruppengeschwindigkeit also sehr nahe bei der Lichtgeschwindigkeit. Anders ist es dagegen bei Radiowellen im Meter-Gebiet. Dort liegt die Frequenz bei $\omega \approx 3 \times 10^9$, also wesentlich näher bei der Plasmafrequenz, und die Dispersion macht sich schon bemerkbar. Man kann die Frequenzabhängigkeit der Laufzeit benutzen, um Information über die Elektronendichte des interstellaren Mediums zu erhalten.

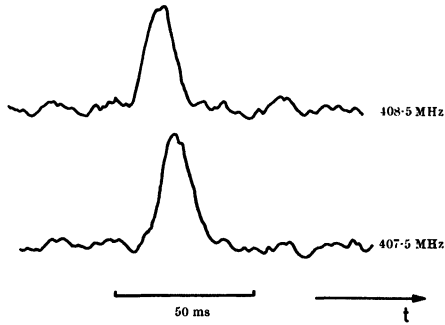


Abb. 40.1 Pulsarsignal in zwei Frequenzen. Der Puls kommt in der höheren Frequenz früher an.

Für $\omega \gg \omega_p$ ist die Laufzeit Δt eines Signals der Frequenz ω vom Sender A zum Beobachter B :

$$(40.2) \quad (\Delta t)_\omega = \int_A^B \frac{ds}{v_{gr}} = \frac{1}{c} \int_A^B (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{-1/2} ds \approx \frac{1}{c} \int_A^B (1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) ds,$$

dabei ist ds das Linienelement der Wegstrecke von A nach B . Analog hat man für die benachbarte Frequenz $\omega + \delta\omega$:

$$(40.3) \quad (\Delta t)_{\omega+\delta\omega} = \frac{1}{c} \int_A^B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{(\omega+\delta\omega)^2}\right) ds.$$

Der Laufzeitunterschied ist dann

$$(40.4) \quad \begin{aligned} \delta t &= (\Delta t)_{\omega+\delta\omega} - (\Delta t)_\omega \\ &= \frac{1}{2c} \left[\frac{1}{(\omega+\delta\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \int_A^B \omega_p^2 ds \\ &= \frac{1}{c} \frac{\delta\omega}{\omega^3} \int_A^B \omega_p^2 ds. \end{aligned}$$

Setzt man darin den Ausdruck (34.18) für die Plasmafrequenz ein, so folgt

$$(40.5) \quad \frac{\delta\omega}{\delta t} = C \omega^3 \int_A^B n_e ds = \frac{C \omega^3}{D \bar{n}_e}$$

mit

$$(40.6) \quad C = \frac{c m_e}{4\pi e^2},$$

wobei \bar{n}_e die über die gesamte Wegstrecke \overline{AB} gemittelte Elektronendichte n_e ist und D die Entfernung zwischen Sender und Beobachter. Die Formel (40.5) gestattet auch zu prüfen, ob es sich bei einer beobachteten Frequenzabhängigkeit der Eintreffzeit eines Signals um einen Effekt von der hier betrachteten Art handelt, das Verhältnis $\delta\omega/\delta t$ muß dann nämlich proportional zu ω^3 sein. Das stimmt tatsächlich für die Pulsare, Abb. 40.2 zeigt die Frequenzdrift $\delta\nu/\delta t$ des Pulsars CP 1919 in Abhängigkeit von der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ (nach Maran, Cameron 1968). Die drei Meßpunkte mit ihren Fehlern liegen sehr genau auf der theoretischen Kurve.

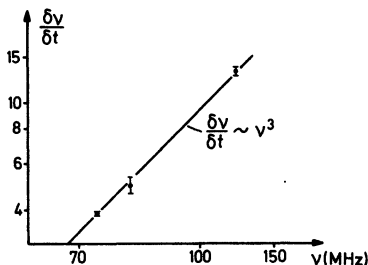


Abb. 40.2 Frequenzdrift der Signale des Pulsars CP 1919 in Abhängigkeit von der Frequenz (nach Maran, Cameron (1968)). Die Skalen sind logarithmisch.

In der Theorie des interstellaren Mediums definiert man das Dispersionsmaß DM als eine aus Pulsarsignalmessungen für das interstellare Medium bestimmbare charakteristische Größe, sie ist im wesentlichen das Integral im Nenner von Gl. (40.5)

$$(40.7) \quad DM = \int_A^B n_e ds.$$

Dabei wird n_e in cm^{-3} gemessen, ds dagegen mit der Vorliebe der Astronomen für Einheiten, die dem Physiker mißfallen, in Parsec angegeben (abgekürzt pc, es ist $1 \text{ pc} = 3.262 \text{ Lichtjahre} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm}$). Durch Messung der Eintreffzeiten der Signale in zwei benachbarten Frequenzen kann DM direkt bestimmt werden. Das Dispersionsmaß für den zuerst entdeckten Pulsar CP 1919 ist 12.55 pc cm^{-3} . Für den berühmten Crab-Pulsar NP 0532 erhält man

$DM = 56.9$. Die Entfernung zum Crab-Pulsar hat man unabhängig zu 2000 pc bestimmt. Damit folgt für die mittlere Elektronendichte auf der Wegstrecke

$$(40.8) \quad \bar{n}_e = 0.028 \text{ cm}^{-3}.$$

Leider gibt \bar{n}_e keinen Aufschluß, wie die die Dispersion erzeugenden Elektronen längs der Wegstrecke verteilt sind. Wenn etwa – wie beim Crab-Pulsar – das Objekt selbst in eine stark ionisierte Wolke eingebettet ist, kann ein wesentlicher Teil der Dispersion dort entstehen. Zur Bestimmung von \bar{n}_e aus DM ist außerdem die Kenntnis der Entfernung des Pulsars nötig. Wir haben jedoch nur von wenigen Pulsaren Information über ihren Abstand vom Sonnensystem.

Genaues Studium der Frequenzdrift der Signale verschiedener Pulsare ergibt, daß \bar{n}_e in dem damit erfaßten Raumbereich zwischen 0.02 (Bridle, Venu-gopal 1969) und 0.09 (Davies 1969) schwankt. Die größten Werte erhält man, wenn das Signal direkt in der galaktischen Ebene läuft.

§ 41. Ausbreitung von Radiowellen in der Korona der Sonne

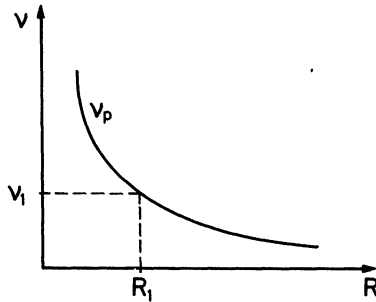
Die Sonne ist von einer heißen ionisierten Gashülle umgeben, der *Sonnenkorona*, die bei totalen Sonnenfinsternissen über mehrere Sonnenradien hinaus beobachtet werden kann. Die Temperatur liegt bei etwa 10^6 °K. Die Elektronendichte n_e nimmt nach außen hin ab. In grober Näherung gilt im Abstand R vom Zentrum die empirisch bestimmte Allen-Baumbach-Formel (vgl. Unsöld 1955)

$$(41.1) \quad n_e = [1.55 (R/R_\odot)^{-6} + 2.99 (R/R_\odot)^{-16}] \times 10^8,$$

wobei R_\odot der Sonnenradius ist. In einigem Abstand von der Oberfläche kann man den zweiten Term in der eckigen Klammer vernachlässigen. Die lokale Plasmafrequenz ω_p sinkt dann etwa wie R^{-3} nach außen hin ab. Geht man von der Kreisfrequenz ω_p zu $\nu_p = \omega_p/2\pi$ über und mißt man ν_p in MHz, so gilt wegen Gl. (40.1)

$$(41.2) \quad \nu_p = 1.12 \times 10^2 (R/R_\odot)^{-3}.$$

Eine Radiowelle der Frequenz ν kann sich in einer bestimmten Höhe über der Sonnenoberfläche nur dann ausbreiten, wenn $\nu > \nu_p$ ist. Das ist schematisch in Abb. 41.1 dargestellt. Für eine vorgegebene Frequenz ν_1 gibt es nur Ausbreitung für $R > R_1$, wobei R_1 durch $\nu_p(R_1) = \nu_1$ bestimmt ist.

Abb. 41.1 Die Plasmafrequenz ν_p in Abhängigkeit vom Abstand von der Sonne.

a) Brechung von Radiowellen in der Sonnenkorona

Wir definierten bereits in Gl. (39.25) den Brechungsindex

$$(41.3) \quad N = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}},$$

der gemäß Gl. (41.2) für eine vorgegebene Frequenz ν von R abhängt. Die Ausbreitung von Radiowellen ist damit zurückgeführt auf ein Problem der geometrischen Optik: gesucht ist der Lichtweg in einem Medium mit variablem Brechungsindex N . Wir betrachten einen Strahl der Frequenz ν , der aus dem Weltall kommend auf die Korona trifft. Dann gilt das Snelliussche Gesetz, und mit Hilfe einer elementargeometrischen Herleitung läßt sich zeigen, daß längs des Lichtstrahls die Gleichung

$$(41.4) \quad NR \sin i = a = \text{const.}$$

gilt. Dabei ist i der Winkel zwischen Strahl und Radiusvektor und a der asymptotische Abstand zwischen Strahl und der Verbindungslinie Sonnenmittelpunkt-Beobachter (vgl. Abb. 41.2).

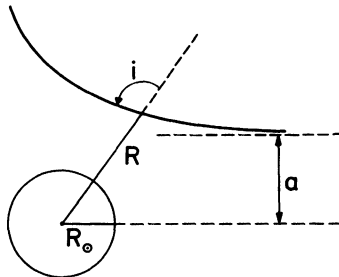


Abb. 41.2 Zur Definition der im Reflexionsgesetz (41.4) auftretenden Größen.

Wir geben hier keinen Beweis der Relation (41.4); man findet eine einfache Herleitung in R. Emdens berühmtem Buch über Gaskugeln (Emden 1907). Wir wollen statt dessen die Eigenschaften von numerisch bestimmten Strahlen diskutieren. Burkhardt und Schlüter (1949) haben mit Hilfe von Gl. (41.4) für die Dichteverteilung (41.1) Strahlen für verschiedene Wellenlängen berechnet. Es ergab sich dabei im Groben das folgende Bild: Senkrecht auftreffende Strahlen (also solche, die direkt auf das Sonnenzentrum zielen) werden in derjenigen Tiefe reflektiert, in der ihre Frequenz gleich der lokalen Plasmafrequenz wird. Schräg eintreffende Strahlen dagegen werden schon früher zurückgeworfen (vgl. Abb. 41.3).

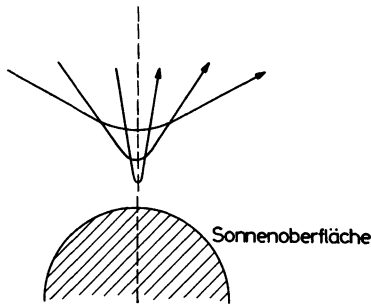


Abb. 41.3 Radiostrahlen gleicher Frequenz, aus verschiedenen Richtungen kommend, dringen verschieden tief in die Korona ein.

Welche Strahlen einer festen Frequenz werden nun von der Sonnenkorona in eine feste Richtung gebeugt – etwa in die Richtung eines Beobachters auf der Erde? Das ersieht man aus Abb. 41.4: Jeder Strahl hat einen Punkt größter Annäherung. Die Punkte größter Annäherung liegen auf einer Fläche (in der Zeichnung punktiert), die außerhalb der Fläche $\nu = \nu_p$ liegt und die die Fläche $\nu = \nu_p$ dort berührt, wo sie dem Beobachter am nächsten ist. Wie man sieht, werden von fast allen Stellen des Himmels Radiowellen zum Beobachter hin gebeugt. Wäre die Sonnenkorona streng kugelsymmetrisch, dann würde sich der ganze Radiohimmel mit all seinen Quellen in ihr spiegeln. Im Zentralteil der Koronascheibe würde der zur Sonne blickende Radioastronom die Quellen wahrnehmen, die hinter seinem Rücken stehen. Auf dem Rand der Scheibe zusammengedrückt erschiene der vor ihm stehende Teil des Himmels. Nur der von der Sonnenkorona verdeckte Teil würde fehlen. Leider ist die Sonnenkorona nicht kugelsymmetrisch aufgebaut. Unregelmäßige Oberflächeneigenschaften der Sonne und damit zusammenhängende Magnetfelder lassen die Elektronendichte räumlich und zeitlich fluktuieren – der Sonnen Spiegel ist zu rau, um wirklich abzubilden.

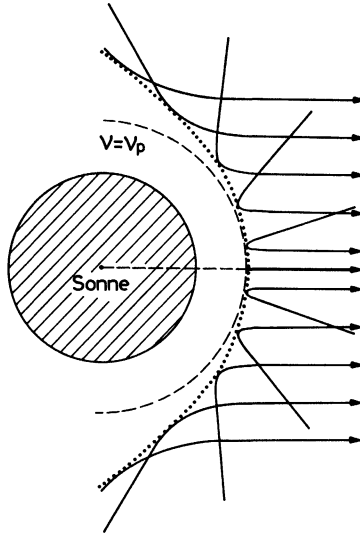


Abb. 41.4 Strahlen gleicher Frequenz, aus verschiedenen Richtungen kommend, werden in der Korona in verschiedenen Tiefen reflektiert und zum Beobachter geworfen. Die Korona wirkt für die Radiostrahlung wie eine spiegelnde Kugel (nach Burkhardt und Schlüter (1949)).

b) Radioausbrüche auf der Sonne

Im Bereich der Radiowellen beobachtet man auf der Sonne von Zeit zu Zeit kurzzeitige Ausbrüche (bursts), bei denen die Intensität um viele Zehnerpotenzen gegenüber der Strahlung der ruhigen Sonne ansteigt – oft bis auf das 10^5 fache.

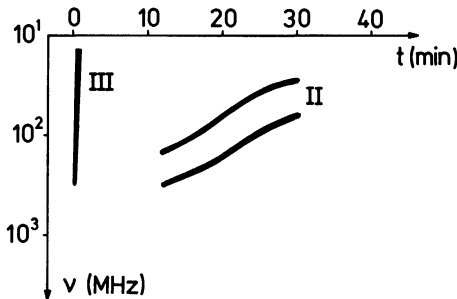


Abb. 41.5 Schematisches Zeit-Frequenz-Verhalten verschiedener Typen solarer Radioausbrüche (nach Boischoit (1967)).

Diese Ausbrüche erstrecken sich über kurze Zeiten von unter einer Sekunde bis zu mehreren Minuten. Von diesen nach ihren verschiedenen Erscheinungsformen in Typen klassifizierten Radioausbrüchen sind die vom Typ II und III besonders interessant. Sie beginnen bei etwa 100 oder 200 MHz und dauern bei Typ II etwa 10 Minuten, bei Typ III nur 0.5 – 1 Sekunde. Dabei verschiebt sich das Maximum der Strahlung immer mehr zu niedrigeren Frequenzen (vgl. Abb. 41.5). Diese Erscheinung hängt eng mit den Ausbreitungseigenschaften elektromagnetischer Wellen im Plasma der Korona zusammen:

Man denke sich einen Sender, der in allen Frequenzen Radiostrahlung abgeben möge. Dieser Sender befinde sich anfangs auf der Sonnenoberfläche. Im Laufe der Zeit möge er langsam in den Weltraum aufsteigen. Welche Radiostrahlung würde man dabei auf der Erde messen? Anfangs dringen nur Wellen zu uns, deren Frequenz größer ist als die Plasmafrequenz am Boden der Korona. Je höher der Sender aber steigt, umso weiter sinkt die lokale Plasmafrequenz und umso niedrigere Frequenzen kommen zur Erde.

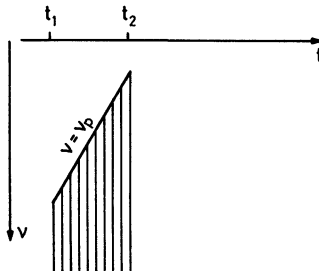


Abb. 41.6 Von einem auf der Sonne aufsteigenden Sender, der im Zeitintervall (t_1, t_2) in allen Frequenzen sendet, kommt nur Strahlung zu uns, deren Frequenz größer als die jeweilige lokale Plasmafrequenz ist. Im Laufe der Zeit kommen immer niedrigere Frequenzen. Schraffiert ist der Bereich der Wertepaare t, ν , für die wir ein Signal erhalten.

Man sollte ein zeitabhängiges Spektrum beobachten, wie es in Abb. 41.6 schematisch gezeichnet ist. Die niedrigste Frequenz, die man gerade noch empfängt, ist gleich der Plasmafrequenz am augenblicklichen Ort des Senders. So kann man das spektrale Verhalten bei den Ausbrüchen vom Typ II und III deuten. Die Quelle steigt auf, und deshalb wird die Frequenz der empfangenen Strahlung immer niedriger. Allerdings sind die Vorgänge komplizierter. Der „Sender“ strahlt nicht in allen Frequenzen gleichmäßig. Neben der Strahlung im Bereich der lokalen Plasmafrequenz (in Abb. 41.5 beim Typ II-Spektrum der obere Streifen) kommt in den meisten Fällen nur noch die erste Oberschwingung (unterer Streifen im Typ II-Spektrum) abgestrahlt.

Aus der beobachteten Frequenzdrift kann man den zeitlichen Verlauf von v_p , d.h. von n_e bestimmen. Aus Gl. (41.1) ergibt sich daraus R als Funktion der Zeit und damit die Aufstiegsgeschwindigkeiten der sendenden Materie. Für die Ausbrüche vom Typ II findet man 400–500 km/sek, für solche vom Typ III Geschwindigkeiten bis zu 40% der Lichtgeschwindigkeit (vgl. etwa Boischoit 1967)!

§ 42. Wellenausbreitung entlang magnetischer Feldlinien

In § 39 untersuchten wir Wellenlösungen der Zweikomponententheorie nur für den Fall verschwindender Magnetfelder. Wir wollen jetzt ebene Wellen in Gegenwart eines Magnetfeldes studieren und beschränken uns daher auf den Fall, daß das ungestörte Magnetfeld B_0 räumlich und zeitlich konstant ist. Wiederum sollen E_0 , v_0 , j_0 verschwinden. Wir werden ferner nur solche Störungen betrachten, bei denen die Vektoren I und E senkrecht aufeinander stehen. Wir betrachten also nur transversale Wellen. Außerdem versuchen wir Lösungen zu finden, für welche die Druckstörung \tilde{P} verschwindet. Das ist der Fall, wenn I und \tilde{v} senkrecht aufeinander stehen, da dann nach der Kontinuitätsgleichung (38.22) die Dichtestörung verschwindet. Der Vektor I soll parallel zu B_0 sein, wir betrachten also Wellenausbreitung entlang der Feldlinien.

a) Die Dispersionsrelation

Wie in § 39b gewinnen wir durch vektorielle Multiplikation von Gl. (38.25) mit I und unter Benutzung von Gl. (38.23) und (38.24) wegen $I \cdot \tilde{E} = 0$ die Beziehung

$$(42.1) \quad -(c^2 l^2 - \omega^2) \tilde{E} = 4\pi i \omega \tilde{j}.$$

Gl. (38.23) liefert uns

$$(42.2) \quad i\omega \frac{4\pi}{\omega_p^2} \tilde{j} = \tilde{E} + \frac{1}{c} \tilde{v} \times B_0 - \frac{\alpha}{\rho_0 c} \tilde{j} \times B_0,$$

und schließlich erhalten wir aus der Bewegungsgleichung (38.21) die Beziehung

$$(42.3) \quad i\omega \rho_0 \tilde{v} = \frac{1}{c} \tilde{j} \times B_0.$$

Hieraus geht hervor, daß $\tilde{\mathbf{v}}$ senkrecht auf \mathbf{B}_0 und damit auf l steht in Übereinstimmung mit unserer Annahme $\tilde{\rho} = 0$ und $\tilde{P} = 0$. Multipliziert man Gl. (42.3) vektoriell mit \mathbf{B}_0 , dann erhält man

$$(42.4) \quad i \omega \rho_0 \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} (\tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0.$$

Setzt man das in Gl. (42.2) ein, so folgt zusammen mit Gl. (42.1)

$$(42.5) \quad i \omega \frac{4\pi}{\omega_p^2} \tilde{\mathbf{j}} = \frac{4\pi i \omega}{\omega^2 - c^2 l^2} \tilde{\mathbf{j}} + \frac{i}{\omega c^2 \rho_0} \mathbf{B}_0 \times (\tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0) - \frac{\alpha}{\rho_0 c} \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0.$$

Damit haben wir nun eine lineare, homogene Gleichung für die Störung $\tilde{\mathbf{j}}$ vorliegen. Mit der Identität

$$(42.6) \quad \mathbf{B}_0 \times (\tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0) \equiv \tilde{\mathbf{j}} B_0^2 - \mathbf{B}_0 (\tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{B}_0)$$

erhalten wir wegen $\tilde{\mathbf{j}} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$ (vgl. Gl. (42.1)) und wegen $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ die Beziehung

$$(42.7) \quad i A \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\alpha \omega}{\rho_0 c} \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0 = 0,$$

mit

$$(42.8) \quad A = \frac{4\pi \omega^2}{\omega_p^2} - \frac{4\pi \omega^2}{\omega^2 - c^2 l^2} - \frac{B_0^2}{c^2 \rho_0}.$$

Wir wollen nun die Richtung l , in die das magnetische Feld \mathbf{B}_0 weist, als die z-Richtung eines kartesischen Koordinatensystems wählen. Die Wellenebene, in der $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ und $\tilde{\mathbf{v}}$ liegen, wird dann durch die x- und y-Richtung aufgespannt. Die Störung $\tilde{\mathbf{j}}$ des Stromes hat dann nur die Komponenten \tilde{j}_x und \tilde{j}_y . Damit ergibt sich wegen

$$(42.9) \quad \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_0 = (\tilde{j}_y B_0, -\tilde{j}_x B_0, 0)$$

aus Gl. (42.7) das folgende System

$$(42.10) \quad i A \tilde{j}_x + \frac{\alpha \omega B_0}{\rho_0 c} \tilde{j}_y = 0,$$

$$(42.11) \quad -\frac{\alpha \omega B_0}{\rho_0 c} \tilde{j}_x + i A \tilde{j}_y = 0.$$

Für eine nicht-triviale Lösung muß die Determinante

$$(42.12) \quad D \equiv \frac{\alpha^2 \omega^2 B_0^2}{\rho_0^2 c^2} - A^2$$

verschwinden. Das ist genau dann der Fall, wenn die folgende Dispersionsrelation gilt:

$$(42.13) \quad \frac{4\pi\omega^2}{\omega_p^2} - \frac{1}{\omega^2 - c^2 l^2} - \frac{B_0^2}{c^2 \rho_0} + \epsilon \frac{\alpha \omega B_0}{\rho_0 c} = 0 \quad (\epsilon = \mp 1).$$

Führen wir wieder den Brechungsindex $N = c/v_{ph} = c l/\omega$ ein, so folgt

$$(42.14) \quad \frac{4\pi\rho_0 c}{1-N^2} = \frac{4\pi\rho_0 c \omega^2}{\omega_p^2} - \frac{B_0^2}{c} + \epsilon \alpha \omega B_0.$$

Die Dispersionsrelation läßt sich viel einfacher schreiben, wenn wir die Gyrationfrequenz der Elektronen $\omega_{ge} = -e B_0/m_e c$ einführen. Dann erhalten wir wegen $\rho_0 = n_i m_i = n_e m_i/Z$ und $\alpha = \rho_0/en_e = m_i/Z e$ die Beziehung

$$(42.15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{1-N^2} &= \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0 c^2} + \epsilon \omega \frac{B_0}{4\pi c n_e} \\ &= \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - \frac{Z m_e}{m_i} \cdot \frac{m_e}{4\pi n_e e^2} \omega_{ge}^2 + \epsilon \omega \frac{m_e}{4\pi n_e e^2} \left(-\frac{e B_0}{m_e c} \right). \end{aligned}$$

Mit $1/\omega_p^2 = m_e/4\pi n_e e^2$ und mit der Gyrationfrequenz der Ionen

$$(42.16) \quad \omega_{gi} = \frac{Z e B_0}{m_i c} = -\frac{Z m_e}{m_i} \omega_{ge}$$

folgt schließlich

$$(42.17) \quad 1 - N^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \epsilon \omega_{ge} \omega + \omega_{gi} \omega_{ge}}.$$

Das ist eine Verallgemeinerung unserer früheren Dispersionsrelation (39.26).

In der Tat geht Gl. (42.17) für verschwindende ungestörte magnetische Feldstärke in unsere frühere Gleichung (39.26) über. Im Falle eines nicht-verschwindenden Magnetfeldes erhält man wegen der beiden Vorzeichen von ϵ

aber nunmehr *zwei* Phasengeschwindigkeiten. Was bedeutet das? Zur Abkürzung setzen wir

$$(42.18) \quad \frac{\alpha \omega B_0}{\rho_0 c} = G.$$

Die Dispersionsrelation (42.13) besagt dann, daß $A = -\epsilon G$ ist. Aus Gl. (42.10) folgt dann

$$(42.19) \quad \tilde{j}_x / \tilde{j}_y = -\frac{G}{iA} = i \frac{G}{A} = -\epsilon i.$$

Da $\tilde{E} \sim \tilde{j}$ ist (Gl. (42.1)), so folgt auch für die Komponenten \tilde{E}_x, \tilde{E}_y von \tilde{E}

$$(42.20) \quad \tilde{E}_x / \tilde{E}_y = -\epsilon i.$$

Physikalisch interessieren nur die reellen Komponenten von \tilde{E} . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß \tilde{E}_x reell sei (das läßt sich immer durch eine geeignete Wahl des Anfangspunktes $t = 0$ erreichen). Dann folgt für den Realteil der x -Komponente des elektrischen Feldes in der Ebene $z = 0$

$$(42.21) \quad \Re(\tilde{E}_x e^{i\omega t}) = \tilde{E}_x \cos \omega t$$

und für den Realteil der y -Komponente

$$(42.22) \quad \Re(\tilde{E}_y e^{i\omega t}) = \Re(\epsilon i \tilde{E}_x e^{i\omega t}) = -\epsilon \tilde{E}_x \sin \omega t.$$

Aus Gl. (42.21) und (42.22) sieht man, daß der Vektor E mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der x - y -Ebene rotiert, unsere beiden (reellen) Komponenten des elektrischen Feldes geben also eine *zirkular polarisierte Welle* wieder. Die beiden möglichen Vorzeichen $\epsilon = \mp 1$ in Gl. (42.17) entsprechen den beiden Drehrichtungen, dem *links-* und dem *rechtspolarisierten Fall!* Wie man aus Gl. (42.17) sehen kann, haben die beiden verschiedenen Polarisierungssinne verschiedene Phasengeschwindigkeiten.

Setzt man in Gl. (42.21) und (42.22) $\epsilon = +1$, so rotiert der elektrische Vektor in der x - y -Ebene im mathematisch negativen Sinne, also in dem Sinne, in dem eine positive Ladung gyriert. Man nennt daher die zugehörige Welle die *ordentliche Welle*. Der Fall $\epsilon = -1$ liefert die *außerordentliche Welle*.

b) Grenzfälle

Wir wollen jetzt die Dispersionsrelation (42.17) etwas genauer studieren. Wir betrachten die Grenzfälle $\omega \rightarrow \infty$ und $\omega \rightarrow 0$.

1. $\omega \rightarrow \infty$

Im Grenzfall beliebig hoher Frequenzen verschwindet die rechte Seite von Gl. (42.17), es wird $N = 1$ und $v_{\text{ph}} = c$, d.h., wir bekommen *elektromagnetische Wellen*. Dasselbe gilt auch für den Grenzfall verschwindender Teilchenzahldichte n , da dann ω_{p} gegen Null geht.

2. $\omega \rightarrow 0$

Im Grenzfall dem Betrage nach sehr kleiner Frequenzen, d.h., wenn $|\omega| \ll |\omega_{\text{ge}}|$, erhalten wir wegen $n \approx n_e \approx Z n_i$ und $n_i m_i = \rho_0$ aus Gl. (42.17)

$$(42.23) \quad \begin{aligned} 1 - N^2 &= \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{gi}} \omega_{\text{ge}}} = - \frac{4\pi e^2 Z n_i}{m_e} \cdot \frac{m_i c}{Z e B_0} \cdot \frac{m_e c}{e B_0} = \\ &= - \frac{4\pi \rho_0}{B_0^2} c^2 = - \frac{c^2}{v_A^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$ die Alfvén-Geschwindigkeit. Es ergibt sich also

$$(42.24) \quad 1 - \frac{c^2}{v_{\text{ph}}^2} = - \frac{c^2}{v_A^2}.$$

Nun ist $c^2/v_A^2 \gg 1$, also muß auch $c^2/v_{\text{ph}}^2 \gg 1$ sein; die 1 auf der linken Seite von Gl. (42.24) kann also vernachlässigt werden. Es folgt

$$(42.25) \quad v_{\text{ph}} = \pm v_A.$$

Im Fall sehr kleiner Frequenzen bekommt man also Alfvén-Wellen.

c) Resonanzen

Der Fall, daß der Nenner in Gl. (42.17) verschwindet, daß also $|N^2| \rightarrow \infty$, verdient besondere Aufmerksamkeit. Wir betrachten dazu die Nullstellen des Nenners in Gl. (42.17), also die Nullstellen der Funktion

$$(42.26) \quad f(\omega) \equiv \omega^2 - \epsilon \omega_{\text{ge}} \omega + \omega_{\text{gi}} \omega_{\text{ge}} \quad (\epsilon = \mp 1).$$

Sie sind gegeben durch

$$(42.27) \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_{ge}}{2} \left(\epsilon \pm 1 \mp 2 \frac{\omega_{gi}}{\omega_{ge}} \right)$$

Dabei wurde die Wurzel in eine Reihe entwickelt, die wegen $\omega_{gi} \ll \omega_{ge}$ nach dem zweiten Glied abgebrochen wurde. Im Fall von $\epsilon = +1$ erhalten wir

$$(42.28) \quad \omega_{1,2} \approx \frac{1}{2} (\omega_{ge} \pm \omega_{ge} \mp 2 \omega_{gi}) = \begin{cases} \omega_{ge} - \omega_{gi} \approx \omega_{ge} \\ \omega_{gi} \end{cases}$$

Dabei gilt rechts der obere Ausdruck für das obere Vorzeichen, der untere Ausdruck für das untere Vorzeichen. Für $\epsilon = -1$ erhalten wir entsprechend

$$(42.29) \quad \omega_{1,2} \approx \frac{1}{2} (-\omega_{ge} \pm \omega_{ge} \mp 2 \omega_{gi}) = \begin{cases} -\omega_{gi}, \\ -\omega_{ge} + \omega_{gi} \approx -\omega_{ge}. \end{cases}$$

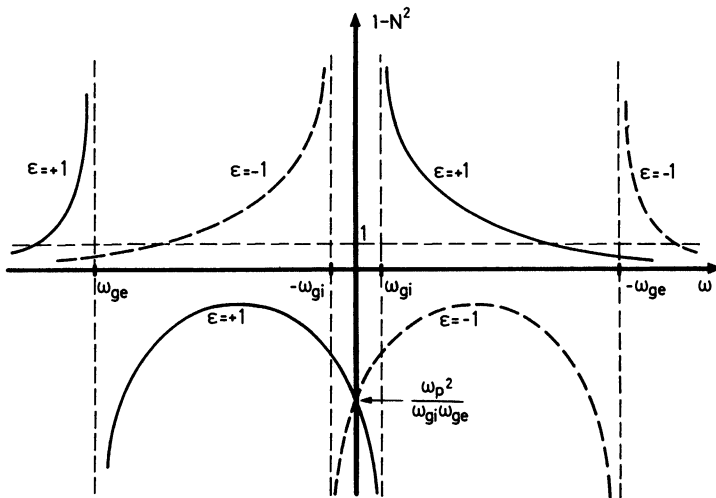


Abb. 42.1 $1 - N^2$ für verschiedene Werte von ω . Die Kurve der ordentlichen Welle ist jeweils durchgezogen, die der außerordentlichen Welle ist gestrichelt. Wellenausbreitung kommt nur zustande, wenn $(1 - N^2) < 1$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgetreu. Die wirklichen Verhältnisse sind in Abb. 42.2 wiedergegeben.

Die Verhältnisse sind schematisch in Abb. 42.1 wiedergegeben. Dort ist $1 - N^2$ für verschiedene Werte von ω aufgezeichnet. An den Nullstellen der Funktion $f(\omega)$ wird $1 - N^2$ unendlich. Der Fall $\epsilon = +1$ ist durchgezogen

ingezeichnet, der Fall $\epsilon = -1$ gestrichelt. Im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ wird für beide Wellensorten $1 - N^2 = \omega_p^2 / \omega_{gi} \omega_{ge}$ und $v_{ph} = v_A$. Im Fall $\omega \rightarrow \infty$ wird $1 - N^2 = 0$ und $v_{ph} = c$.

Wir beschränken uns im Folgenden auf $\omega \geq 0$: Die ordentliche Welle hat gemäß Gl. (42.28) bei ω_{gi} eine Singularität, die außerordentliche gemäß Gl. (42.29) bei $-\omega_{ge}$. Ausbreitung ist nur möglich, wenn $N^2 > 0$ (N reell), also nur dort, wo die Kurven unterhalb der punktierten horizontalen Geraden $1 - N^2 = 1$ liegen. Im Gegensatz zu Abb. 42.1, die die Verhältnisse nur schematisch wiedergibt, haben wir $1 - N^2$ als Funktion von ω in Abb. 42.2 quantitativ richtig wiedergegeben. Wegen $|\omega_{gi}| \approx |\omega_{ge}|/1837$ fällt in der Zeichnung ω_{gi} praktisch mit $\omega = 0$ zusammen. Wir unterscheiden dann die folgenden Bereiche:

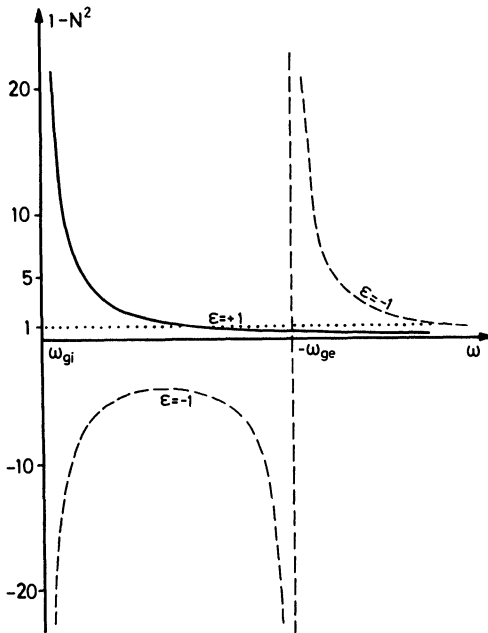


Abb. 42.2 Brechungsindex der ordentlichen und außerordentlichen Welle in Abhängigkeit von ω . Die Gerade $\omega = \omega_{gi}$ fällt praktisch mit der Achse $\omega = 0$ zusammen.

1. $\omega \gg -\omega_{ge}$

Hier ist für beide zirkularen Polarisationsrichtungen Ausbreitung möglich. Der Brechungsindex für die ordentliche Welle ist aber kleiner als der für die

außerordentliche Welle. Wenn ω von oben her an $-\omega_{ge}$ herankommt, dann wird $N^2 < 0$ für den Fall $\epsilon = -1$. Die außerordentliche Welle kann sich dann nicht mehr ausbreiten. Was mit der ordentlichen Welle geschieht, hängt von der Plasmafrequenz ab. Für die ordentliche Welle wird bei $\omega = -\omega_{ge}$

$$(42.30) \quad N^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_{ge}^2} = 1 - 2\pi c^2 m_e \frac{n_e}{B_0^2}.$$

Nur wenn $n_e/B_0^2 < 1/2\pi c^2 m_e$ gilt, ist dort noch N reell, und wir bekommen auch Ausbreitung der ordentlichen Welle für $\omega > -\omega_{ge}$ (vgl. Abb. 42.2).

2. $\omega_{gi} < \omega < -\omega_{ge}$

In diesem Bereich kann sich im wesentlichen nur die außerordentliche Welle ausbreiten. Insbesondere ist keine elliptische oder lineare Polarisation möglich, da sich diese Wellenarten aus *beiden* Drehrichtungen des zirkular polarisierten Lichtes zusammensetzen. Für die ordentliche Welle gibt es allenfalls einen kleinen Bereich der Ausbreitung für $\omega < -\omega_{ge}$, nämlich wenn nach Gl. (42.30) N bei $\omega = -\omega_{ge}$ reell ist (vgl. Abb. 42.2).

3. $\omega < \omega_{gi}$

Hier können sich wieder beide Wellenarten ausbreiten, wieder ist der Brechungsindex verschieden. Für den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ werden beide Phasengeschwindigkeiten gleich der Alfvéngeschwindigkeit (vgl. Gl. (42.25)). In der Tat können wir aus den beiden zirkular polarisierten Wellenanteilen linear polarisierte Wellen zusammensetzen, die dann identisch werden mit den früher behandelten Alfvénwellen.

§ 43. Der Faraday-Effekt und das interstellare Magnetfeld

Die in § 42 hergeleiteten Unterschiede in der Ausbreitungsgeschwindigkeit verschieden zirkular polarisierter Wellen werden zur Messung von interstellaren Magnetfeldern benutzt. Betrachten wir eine elektromagnetische Welle mit $\omega \gg |\omega_{ge}|$, so gilt wegen Gl. (42.17)

$$(43.1) \quad 1 - N^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \epsilon \frac{\omega_{ge}}{\omega} + \frac{\omega_{gi} \omega_{ge}}{\omega^2}} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \epsilon \frac{\omega_{ge}}{\omega} - \frac{\omega_{gi} \omega_{ge}}{\omega^2} \right),$$

Dabei entspricht das Vorzeichen $\epsilon = +1$ der ordentlichen Welle, ihr Brechungsindex N_+ ist also

$$(43.2) \quad N_+^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ge}}{\omega} - \frac{\omega_{gi} \omega_{ge}}{\omega^2} \right).$$

Entsprechend bekommt man für $\epsilon = -1$ den Brechungsindex der außerordentlichen Welle

$$(43.3) \quad N_-^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ge}}{\omega} - \frac{\omega_{gi} \omega_{ge}}{\omega^2} \right).$$

Von einem Sender möge nun eine linear polarisierte Welle ausgehen. Wir betrachten dann die Ausbreitung der beiden zirkular polarisierten Komponenten, aus denen diese Welle zusammengesetzt ist. Die Ausbreitungsrichtung der Welle stehe senkrecht auf der x - y -Ebene. In ihr sei die ordentliche Welle durch ihren elektrischen Vektor

$$(43.4) \quad \mathbf{E}_+ = (E_{x+}, E_{y+}) = \tilde{E} (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

beschrieben. Dabei ist \tilde{E} reell. Für die außerordentliche Welle hat man entsprechend

$$(43.5) \quad \mathbf{E}_- = (E_{x-}, E_{y-}) = \tilde{E} (\cos \omega t, -\sin \omega t).$$

Beide zusammen ergeben eine linear polarisierte Welle, deren Polarisations ebene mit der y - z -Ebene zusammenfällt. Wegen der unterschiedlichen Brechungsindizes für die beiden zirkular polarisierten Komponenten sind ihre Phasengeschwindigkeiten verschieden, also auch ihre Laufzeiten t_+ und t_- vom Sender A zum Empfänger B : Es gilt

$$(43.6) \quad t_{\pm} = \int_A^B \frac{ds}{v_{ph\pm}},$$

wo v_{ph+} und v_{ph-} die Phasengeschwindigkeiten der beiden zirkular polarisierten Wellen sind. Dabei ist die Integration über den Weg von A nach B zu nehmen. Die Laufzeitdifferenz ist

$$(43.7) \quad \delta t = t_+ - t_- = \int_A^B \delta \left(\frac{1}{v_{ph}} \right) ds$$

mit

$$(43.8) \quad \delta \left(\frac{1}{v_{\text{ph}}} \right) = \frac{1}{v_{\text{ph}+}} - \frac{1}{v_{\text{ph}-}}.$$

Nun ist wegen $v_{\text{ph}} = c/N$

$$(43.9) \quad \delta \left(\frac{1}{v_{\text{ph}}} \right) = \frac{1}{c} \delta N = \frac{1}{c} (N_+ - N_-).$$

Nach Gl. (43.2) und (43.3) bekommen wir

$$(43.10) \quad \delta N^2 = - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \cdot 2 \frac{\omega_{\text{ge}}}{\omega}.$$

Wenn ω so groß ist, daß $N \approx 1$ ist, folgt mit $\delta N^2 = 2 N \cdot \delta N$

$$(43.11) \quad \delta N = - \frac{\omega_{\text{p}}^2 \omega_{\text{ge}}}{\omega^3},$$

und wir erhalten

$$(43.12) \quad \delta t = - \frac{1}{c} \int_A^B \frac{\omega_{\text{p}}^2 \omega_{\text{ge}}}{\omega^3} ds.$$

Um den Effekt des Laufzeitunterschiedes zu diskutieren, stellen wir den elektrischen Vektor am Ort des Senders und des Beobachters in einer *komplexen* x - y -Ebene dar, setzen also für den elektrischen Vektor am Ort des Senders für die beiden Wellenarten

$$(43.13) \quad \mathbf{E}_+ = E_{x+} + i E_{y+} = \tilde{\mathbf{E}} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \tilde{\mathbf{E}} \cdot e^{i\omega t},$$

$$(43.14) \quad \mathbf{E}_- = E_{x-} + i E_{y-} = \tilde{\mathbf{E}} (\cos \omega t - i \sin \omega t) = \tilde{\mathbf{E}} \cdot e^{-i\omega t}$$

und für ihre Superposition

$$(43.15) \quad \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \tilde{\mathbf{E}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Dieser Ausdruck beschreibt einen Punkt, der sich in der komplexen x - y -Ebene periodisch mit der Frequenz ω längs der (reellen) x -Achse hin und her bewegt. Das entspricht dem elektrischen Vektor unserer linear polarisierten Welle am Ausgangsort. Am Ort des Beobachters wählen wir den Anfangspunkt der Zeit so, daß die ordentliche Welle wieder durch $\tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t}$ beschrieben wird. Die

außerordentliche Welle hat dann demgegenüber eine Phasenverschiebung von $\delta \varphi = \omega \delta t$. Für sie gilt also

$$(43.16) \quad E_- = E_{x_-} + i E_{y_-} = \tilde{E} e^{-i\omega t - i\delta \varphi}.$$

Superponieren wir beide Wellen, so folgt

$$(43.17) \quad E_+ + E_- = \tilde{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t - i\delta \varphi}) = \tilde{E} e^{-i\delta \varphi/2} (e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}),$$

$$t' = t + \delta \varphi/2\omega.$$

Wieder pendelt die durch $E_+ + E_-$ beschriebene komplexe Zahl auf einer Geraden periodisch mit der Frequenz ω hin und her. Gegenüber der ursprünglichen Polarisationssebene ist die neue Polarisationssebene aber um $\delta \varphi/2$ gedreht! Der Drehwinkel ist

$$(43.18) \quad \delta \alpha = \frac{\delta \varphi}{2} = \frac{\delta t}{2} \cdot \omega = -\frac{1}{2c\omega^2} \int_A^B \omega_p^2 \omega_{ge} ds.$$

Wegen

$$(43.19) \quad \omega_p^2 \omega_{ge} = -\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \cdot \frac{eB}{m_e \cdot c}$$

ist der Integrand in Gl. (43.18) proportional zu $B n_e$.

Wenn man also eine Quelle hat, die linear polarisierte Strahlung aussendet, dann gibt die Drehung der Polarisationssebene Aufschluß über das mit der Elektronendichte gewichtete mittlere Magnetfeld. Dazu ist es nicht nötig, daß man die ursprüngliche Richtung der Polarisationssebene kennt. Wie man aus Gl.(43.18) ersieht, ist der Polarisationswinkel am Ort des Beobachters frequenzabhängig wie ω^{-2} ; es genügt also, den Polarisationswinkel in zwei Frequenzen zu messen, um das Integral in Gl. (43.18) zu bestimmen. Die durch ein Magnetfeld hervorgerufene Drehung der Polarisationssebene nennt man den *Faraday-Effekt* oder die *Faraday-Rotation*.

In der Astrophysik wird der Faraday-Effekt zur Messung interstellarer Magnetfelder benutzt. Geht man von ω zu λ_m , der Wellenlänge in Metern, über und mißt man ds wieder einmal in Parsec, B in Gauß und n_e in cm^{-3} , so folgt die Gleichung für das sogenannte *Rotationsmaß* RM :

$$(43.20) \quad RM = \frac{\delta \alpha}{\lambda_m^2} = 8.11 \times 10^5 \int_A^B n_e B ds.$$

Wir haben diese Formel nur hergeleitet für den Fall, daß Magnetfeld und Sehstrahlrichtung parallel sind. Im Fall eines nichtparallelen Feldes muß man B durch die zur Sehstrahlrichtung parallele Komponente des Feldes B_{\parallel} ersetzen. Das Vorzeichen wird dabei so gewählt, daß $RM < 0$ ist, wenn B vom Beobachter weggerichtet ist.

Zur Bestimmung des Rotationsmaßes ist also die Richtung der Polarisation der ankommenden Welle für zwei benachbarte Wellenlängen zu bestimmen. Für den Crab-Pulsar NP 0532 beispielsweise erhält man $RM = -25$. Das in Gl. (40.7) definierte Dispersionsmaß DM war für dieses Objekt 56.9. Definiert man ein über die zurückgelegte Wegstrecke gemittelttes Magnetfeld \bar{B}_{\parallel} durch

$$(43.21) \quad \bar{B}_{\parallel} = \int_A^B B_{\parallel} n_e ds \bigg/ \int_A^B n_e ds,$$

dann wird wegen Gl. (43.20) und (40.7)

$$(43.22) \quad \bar{B}_{\parallel} = 1.23 \times 10^{-6} \frac{RM}{DM}.$$

Für den Crab-Pulsar erhält man demnach $\bar{B}_{\parallel} \approx 5 \times 10^{-7}$ Gauß.

Es ist sehr schwer, aus Messungen des Rotationsmaßes allein Information über das wirkliche Magnetfeld zu erhalten. Man braucht eine Quelle, die linear polarisierte Strahlung emittiert. Das sind aber meist Quellen, die Synchrotronstrahlung aussenden, also Strahlung, die von relativistischen Elektronen herührt, die in einem Magnetfeld gyrieren. Dann muß man aber erwarten, daß bereits am Entstehungsort ein wesentlicher Beitrag zu dem im Ausdruck (43.20) für RM auftretenden Integral geliefert wird. Zum andern gibt die im Ausdruck für \bar{B}_{\parallel} auftretende Wichtung über n_e weitere Probleme. Man lernt aus \bar{B}_{\parallel} nichts über das Magnetfeld an sich, sondern nur über das Feld an den Stellen, an denen die Elektronendichte groß ist. Schließlich löschen sich längs des Sehstrahles hintereinanderliegende Felder entgegengesetzter Richtung in ihrem Beitrag zu RM aus.

Überraschenderweise gibt auch die Ionosphäre einen merklichen Beitrag zu den gemessenen Rotationsmaßen kosmischer Objekte. Mit einer Dicke von $s = 3 \times 10^7 \text{ cm} \approx 10^{-11} \text{ pc}$, einem Magnetfeld von 0.3 Gauß und einer Elektronendichte von $n_e = 10^6$ liefert die Ionosphäre

$$(43.23) \quad RM \approx 8.11 \times 10^5 \cdot n_e B_{\parallel} s = 2.43.$$

Der Winkel $\delta \alpha$, um den sich die Polarisationsrichtung beim Durchgang durch die Ionosphäre dreht, ist demnach bei einer Wellenlänge von 3 m:

$$(43.24) \quad \delta \alpha = RM \cdot \lambda_m^2 = 22.$$

Dreieinhalbmal dreht sich die Polarisationsrichtung um 360° ! Man mißt natürlich diese Drehung nicht direkt, sondern nur differentiell mit Hilfe zweier benachbarter Wellenlängen.

Demgegenüber ist der Beitrag der Ionosphäre zum Dispersionsmaß vernachlässigbar:

$$(43.25) \quad DM = n_e s = 10^{-5}.$$

Kapitel VIII

STATISTISCHE THEORIE

Unser bisheriger Kurs durch die Plasmaphysik war eine stufenweise Verbesserung der Beschreibungsweise: Im mikroskopischen Bild des ersten Kapitels untersuchten wir die Bewegung einzelner geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld. Eine erste makroskopische Beschreibung lieferte dann die Magnetohydrodynamik. Obwohl dort das Plasma auf naive Weise als ein homogenes Medium betrachtet wurde, hatte diese Theorie schon eine große Anzahl von Anwendungen und lieferte die Erklärung für viele Phänomene der Plasmaphysik. Die Zweikomponententheorie schließlich berücksichtigte schon, daß ein Plasma aus Ionen und Elektronen besteht. Dadurch wurden neue Eigenschaften des Plasmas sichtbar, die in der Magnetohydrodynamik noch nicht auftreten. Den besten, aber auch schwierigsten Zugang zum Verständnis der Physik geladener Gase liefert die statistische Beschreibungsweise: Man geht von der Physik der einzelnen geladenen Teilchen aus und bekommt dann die makroskopischen Eigenschaften des Plasmas durch geeignete Mittelung über sehr viele Teilchen. Wenn heutzutage nach neuen Ergebnissen der Plasmaphysik geforscht wird, geschieht das fast immer im Rahmen der statistischen Theorie. Wir können im Rahmen dieses Buches nur eine kurze Einführung in die statistische Theorie und einige ihrer wichtigsten Aspekte bringen. Der Zugang zur statistischen Theorie des Plasmas ist ganz ähnlich wie der zur statistischen Mechanik für neutrale Gase.

§ 44. Phasenraum und Verteilungsfunktion

Jedes Teilchen kann man durch seine drei Orts- und seine drei Geschwindigkeits- bzw. Impulskoordinaten vollständig in seinen mechanischen Eigenschaften beschreiben. Wir führen einen abstrakten, 6dimensionalen Raum, den *Phasenraum*, ein. Seine Koordinaten sind die drei (verallgemeinerten) Ortskoordinaten q_1, q_2, q_3 und die drei (verallgemeinerten) Impulskoordinaten p_1, p_2, p_3 . Jedem Teilchen entspricht also eineindeutig ein Punkt im Phasenraum:

$$(44.1) \quad Q = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = (\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Besteht ein Plasma aus N Teilchen, so wird sein Zustand also durch N solcher Punkte im Phasenraum beschrieben.

Es gibt grundsätzlich noch einen anderen Ansatz zur statistischen Mechanik, den man nicht mit dem obigen Ansatz verwechseln darf: Dazu führt man einen $6N$ -dimensionalen abstrakten Raum ein; der Zustand des ganzen Systems ist dann durch einen einzigen Punkt in diesem $6N$ -dimensionalen Raum charakterisiert. Wir wollen hier jedoch den ersten Weg wählen.

Während sich ein Teilchen durch den Raum bewegt, verändern sich seine Koordinaten und Impulse. Entsprechend bewegt sich auch der Bildpunkt des Teilchens im Phasenraum. Wir definieren eine Geschwindigkeit im Phasenraum durch den Sechser-Vektor

$$(44.2) \quad \mathbf{C} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}, \frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \frac{dp_3}{dt} \right).$$

Weiterhin sei $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ eine Dichtefunktion im Phasenraum in dem Sinne, daß

$$(44.3) \quad f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d q_1 \dots d p_3$$

die Zahl der Bildpunkte im Volumen

$$(44.4) \quad (q_1, q_1 + dq_1), \dots, (p_3, p_3 + dp_3)$$

angibt. $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ heißt die *Verteilungsfunktion* des betreffenden Gases. Für die Strömung der Bildpunkte im Phasenraum kann man – in Analogie zur dreidimensionalen Hydrodynamik – die *Kontinuitätsgleichung* aufstellen:

$$(44.5) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_6 \cdot (f \mathbf{C}) = 0.$$

Dabei bedeutet $\nabla_6 \cdot \mathbf{C}$ die sechsdimensionale Divergenz der Form

$$(44.6) \quad \nabla_6 \cdot \mathbf{C} = \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial C_\nu}{\partial q_\nu} + \frac{\partial C_{\nu+3}}{\partial p_\nu} \right).$$

Mit der entsprechenden Definition eines Gradienten

$$(44.7) \quad \nabla_6 f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_3} \right)$$

läßt sich dann die Kontinuitätsgleichung (44.5) auch in der Form

$$(44.8) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla_6 f + f \nabla_6 \cdot \mathbf{C} = \frac{df}{dt} + f \nabla_6 \cdot \mathbf{C} = 0$$

schreiben. Wie bewegen sich nun die Bildpunkte durch den Phasenraum? Für die Bewegung von Teilchen im elektromagnetischen Feld gelten die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen

$$(44.9) \quad \frac{dp_\nu}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad \frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Dabei ist H die Hamiltonfunktion für die Bewegung eines Teilchens im Feld. Wenn \mathbf{w} die dreidimensionale Koordinatengeschwindigkeit eines Teilchens der Masse m und der Ladung Ze ist, so lautet die Hamiltonfunktion

$$(44.10) \quad H = \frac{1}{2m} \left(m \mathbf{w} - \frac{Ze}{c} \mathbf{A} \right)^2 + Ze \phi.$$

Dabei ist ϕ das elektrische Potential, das zusammen mit dem durch $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ definierten Vektorpotential der Beziehung

$$(44.11) \quad \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

genügt (siehe z.B. Landau/Lifschitz 1971).

Wegen der Hamiltonschen Gleichungen (44.9) verschwindet nun in

$$(44.12) \quad \nabla_6 \cdot \mathbf{C} = \sum_{\nu=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial q_\nu} \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial t} \right) \right]$$

jeder Summand einzeln; es gilt also die Beziehung

$$(44.13) \quad \nabla_6 \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Das ist der *Liouvillesche Satz*; mit ihm folgt aus der Kontinuitätsgleichung (44.8)

$$(44.14) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla_6 f = 0.$$

Für den mitbewegten Beobachter bleibt die Dichte der Bildpunkte im Phasenraum also konstant, das Substrat der Bildpunkte verhält sich wie ein *inkompressibles Medium*.

Kennt man die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, so hat man damit schon eine ganze Menge von Informationen über den Zustand des Gases. Beispielsweise ist

$$(44.15) \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p} = n(\mathbf{q}, t), \quad d^3 \mathbf{p} = dp_1 dp_2 dp_3$$

die normale, bisher benutzte Teilchenzahldichte, die natürlich noch eine Funktion des Ortes und der Zeit ist. Durch Mittelung über alle Teilchen kann man damit Mittelwerte auf folgende Weise definieren: Es sei $a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ eine beliebige Funktion im Phasenraum, dann definieren wir als ihren Mittelwert über alle Teilchen:

$$(44.16) \quad \bar{a}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{q}, t)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \cdot f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}.$$

Damit diese Integrale überhaupt existieren, müssen die beteiligten Funktionen natürlich im Unendlichen genügend stark abfallen.

Die makroskopische Geschwindigkeit eines Gases erhält man durch Mittelung über die mikroskopische Teilchengeschwindigkeiten:

$$(44.17) \quad \mathbf{v}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}.$$

Auf diese Weise kann man im Prinzip alle makroskopischen Größen eines Gases aus seinen mikroskopischen Eigenschaften herleiten.

§ 45. Die Vlasov-Gleichungen

Die oben eingeführten Koordinaten und Impulskomponenten eines Teilchens q_ν und p_ν müssen den Bewegungsgleichungen für geladene Teilchen genügen, d.h., es muß gelten

$$(45.1) \quad \frac{d p_\nu}{d t} = m \frac{d w_\nu}{d t} = Z e (E + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B})_\nu = K_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3$$

wobei $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ die Koordinatengeschwindigkeit des Teilchens und $Z e$ seine Ladung sind. Wenn wir weiter die Bezeichnungen

$$(45.2) \quad \nabla_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3} \right), \quad \nabla_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial p_3} \right)$$

einführen, so können wir mit Gl. (45.1) und (45.2) die Kontinuitätsgleichung (44.14) auch in der Form

$$(45.3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}) f + (\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}) f = 0$$

schreiben. Dabei haben wir die im Sechservektor \mathbf{C} in Gl. (44.2) auftretenden Zeitableitungen durch $dq_\nu/dt = w_\nu$ und $dp_\nu/dt = K_\nu$ ersetzt. $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ ist die Summe der elektrostatischen und magnetischen Kräfte, die auf ein einzelnes Teilchen wirken, \mathbf{K} ist also eine sehr stark fluktuierende Funktion. Strenggenommen müßte man also beispielsweise das elektrische Feld in Gl. (45.1) durch Summation über die retardierten Potentiale aller Teilchen ausrechnen. Ähnlich wäre für das Magnetfeld zu verfahren. Diese stark fluktuierenden Größen sind unangenehm zu handhaben. Wir wollen statt dessen mittlere Felder definieren, indem wir die Ladungen verschmieren: Wenn f_e die Verteilungsfunktion der Elektronen ist, dann ist

$$(45.4) \quad n_e = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}$$

ihre Anzahldichte, analog ist mit der Verteilungsfunktion f_i der Ionen die Anzahldichte n_i

$$(45.5) \quad n_i = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}.$$

Dann ist die verschmierte Ladungsdichte gegeben durch

$$(45.6) \quad \sigma = Z e n_i - e n_e = Z e \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_i d^3 \mathbf{p} - e \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_e d^3 \mathbf{p}.$$

Jetzt definieren wir ein mittleres elektrisches Feld $\bar{\mathbf{E}}$ gemäß

$$(45.7) \quad \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \sigma,$$

das wir der Einfachheit halber auch mit \mathbf{E} benennen wollen. Die sich bewegenden Teilchen mögen also nicht die elektrischen Felder der einzelnen Teilchen spüren, sondern nur das über alle anderen Teilchen verschmierte Feld.

Bei dieser Verschmierung macht man wegen der großen Reichweite der Coulomb-Kräfte nur einen kleinen Fehler. Bei Kräften, die mit der Entfernung sehr viel stärker abfallen, also beispielsweise bei Molekül- oder Kernkräften, ist so eine Verschmierung nicht ohne weiteres möglich.

Ähnlich verfahren wir mit dem Magnetfeld. Wir definieren mit n_e und n_i aus Gl. (45.4) und (45.5) und mit den mittleren Geschwindigkeiten

$$(45.8) \quad \mathbf{v}_e = \frac{1}{n_e} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w} f_e \, d^3 \mathbf{p},$$

$$(45.9) \quad \mathbf{v}_i = \frac{1}{n_i} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w} f_i \, d^3 \mathbf{p}$$

eine mittlere Stromdichte

$$(45.10) \quad \bar{\mathbf{j}} = e (Z n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e).$$

Auch hier bezeichnen wir der Einfachheit halber $\bar{\mathbf{j}}$ mit \mathbf{j} . Aus \mathbf{j} läßt sich mit

$$(45.11) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

das verschmierte Magnetfeld \mathbf{B} berechnen.

Für ein einzelnes Teilchen mit der mikroskopischen Geschwindigkeit \mathbf{w} erhalten wir also als mittlere, geglättete Kraftdichte

$$(45.12) \quad \mathbf{k} = Z e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B} \right).$$

Dann folgen mit

$$(45.13) \quad \nabla_{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial w_3} \right) = m \nabla_{\mathbf{p}}$$

aus Gl. (45.3) die Kontinuitätsgleichungen im Phasenraum für Elektronen- und Ionenkomponente einzeln:

$$(45.14) \quad \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{w}_e \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f_e - \frac{e}{m_e} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w}_e \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \right] f_e = 0,$$

$$(45.15) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{w}_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f_i + \frac{Ze}{m_i} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w}_i \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \right] f_i = 0.$$

Dabei sind f_e , f_i die Verteilungsfunktion der Elektronen und der Ionen, \mathbf{w}_e und \mathbf{w}_i ihre mikroskopischen Geschwindigkeiten. Gleichungen (45.14) und (45.15) heißen die *Vlasov-Gleichungen*. Einzelstöße werden in diesen Gleichungen natürlich nicht erfaßt, die Felder wurden ja durch die Integration über d^3p verschmiert.

Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, daß aus den Vlasov-Gleichungen der Formalismus der Zweikomponententheorie folgt. Später werden wir weiter sehen, daß die Vlasov-Gleichungen Plasma-Phänomene beschreiben, die in der makroskopischen Zweikomponententheorie nicht enthalten sind. Die statistische Beschreibungsweise geht also über die makroskopische hinaus.

§ 46. Herleitung der Gleichungen der Zweikomponententheorie aus den Vlasov-Gleichungen

Wir wollen jetzt zeigen, daß sich durch Integration der Vlasov-Gleichungen (45.14), (45.15) die Grundgleichungen (31.1) und (31.2) der Zweikomponententheorie herleiten lassen. Das geht allerdings nur für unendliche Leitfähigkeit, denn mit der Verschmierung der elektrischen und magnetischen Felder haben wir die Wechselwirkungen einzelner Teilchen miteinander ausgeschaltet. Auf der Wechselwirkung der Coulomb-Felder beim Vorübergang zweier Teilchen beruht aber gerade die Reibung zwischen Elektronen- und Ionenkomponente und damit der elektrische Widerstand des Mediums. Wollte man den Ohmschen Widerstand des Mediums in der statistischen Theorie mitbehandeln, dann müßte man berücksichtigen, daß durch Vorübergänge einzelner Teilchen aneinander die Geschwindigkeiten der Teilchen schnell um große Beträge geändert werden können. Dies wird in der statistischen Theorie durch einen Term auf der rechten Seite der Gln. (45.14) und (45.15), das sogenannte „Stoßintegral“, berücksichtigt. Mit seiner Hilfe (und mit geeigneten Näherungen) lassen sich die Gleichungen der Zweikomponententheorie dann auch für endliche Leitfähigkeit herleiten. Wir beschränken uns hier aber auf den einfacheren Fall unendlicher Leitfähigkeit.

Im folgenden setzen wir immer voraus, daß die Verteilungsfunktion f für beliebig hohe Geschwindigkeiten genügend stark abfällt, so daß die mit f gebildeten Integrale immer existieren. Diese Voraussetzung, die auch schon im

vorletzten Paragraphen für eine sinnvolle Definition der Mittelwerte nötig war, wird beispielsweise von einer Maxwell-Verteilung für f erfüllt. Es sei nun $a(\mathbf{p})$ eine beliebige Funktion des Impulses \mathbf{p} (bzw. der Geschwindigkeit \mathbf{w}). Dann gelten die folgenden Hilfsformeln, wobei wir zur Abkürzung die Schreibweise

$$(46.1) \quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3 \mathbf{p} = \int d^3 \mathbf{p}$$

benutzen:

$$(46.2) \quad \int a(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int a f d^3 \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} (n \bar{a}).$$

Weiterhin gilt

$$(46.3) \quad \int a(\mathbf{p}) p_\nu \frac{\partial f}{\partial q_\nu} d^3 \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial q_\nu} \int a p_\nu f d^3 \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial q_\nu} (n \overline{p_\nu a}).$$

Schließlich benötigen wir noch eine dritte Hilfsformel. Durch partielle Integration ergibt sich

$$(46.4) \quad \int a(\mathbf{p}) k_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} d^3 \mathbf{p} = \int \frac{\partial}{\partial p_\nu} (a k_\nu f) d^3 \mathbf{p} - \int f \frac{\partial}{\partial p_\nu} (a k_\nu) d^3 \mathbf{p}.$$

Führen wir die Integration über dp_ν im ersten Integral der rechten Seite aus, so ergibt sich wegen der bestimmten Integration von $p_\nu = -\infty$ bis $+\infty$

$$(46.5) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[(a k_\nu f)_{p_\nu=+\infty} - (a k_\nu f)_{p_\nu=-\infty} \right] dp_\mu dp_\lambda, \quad \lambda \neq \mu \neq \nu.$$

Da die Verteilungsfunktion jedoch für $p_\nu \rightarrow \pm \infty$ stark verschwinden sollte, verschwindet auch der Beitrag dieses Integrals. Das liefert die Hilfsformel

$$(46.6) \quad \int a(\mathbf{p}) k_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} d^3 \mathbf{p} = -n \frac{\partial \overline{k_\nu a}}{\partial p_\nu}.$$

Es seien k_ν die Komponenten der Kraftdichte \mathbf{k} von Gl. (45.12). Dann gilt

$$(46.7) \quad \frac{\partial k_\nu}{\partial p_\nu} = \frac{1}{m} \frac{\partial k_\nu}{\partial w_\nu} = \frac{Z e}{m c} \frac{\partial}{\partial w_\nu} (\mathbf{w} \times \mathbf{B})_\nu = 0,$$

denn die ν -te Komponente des Kreuzproduktes enthält nur Komponenten $w_\mu B_\lambda$ mit $\mu \neq \lambda \neq \nu$. Wir erhalten dann aus der Hilfsformel (46.6)

$$(46.8) \quad \int a(\mathbf{p}) k_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} d^3 \mathbf{p} = -n k_\nu \frac{\partial a}{\partial p_\nu}.$$

Wir betrachten zunächst nur das Elektronengas und integrieren dazu Gl.(45.14) über $d^3 \mathbf{p}$ (von $-\infty$ bis $+\infty$). Damit die Gleichungen nicht zu unübersichtlich werden, lassen wir im Folgenden den Index e fortfallen, schreiben also $f_e = f$, $n_e = n$, $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}$ und $m_e = m$. Unter Anwendung von Gl. (46.2) mit $a \equiv 1$ ergibt sich dann aus dem ersten Term

$$(46.9) \quad T_1 = \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{p} = \frac{\partial n}{\partial t}.$$

Ebenso bekommen wir aus dem zweiten Term mit Gl. (46.3) und $a \equiv 1$

$$(46.10) \quad \begin{aligned} T_2 &= \int (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}) f d^3 \mathbf{p} = \frac{1}{m} \int \sum_{\nu=1}^3 p_\nu \frac{\partial f}{\partial q_\nu} d^3 \mathbf{p} \\ &= \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_\nu} n \bar{w}_\nu = \nabla_{\mathbf{q}} \cdot n \mathbf{v}, \end{aligned}$$

wobei

$$(46.11) \quad \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{v} = \frac{1}{n} \int \mathbf{w} f d^3 \mathbf{p}$$

die makroskopische Geschwindigkeit des Elektronengases ist. Auf den dritten Term schließlich wenden wir in analoger Weise Gl. (46.8) mit $a \equiv 1$ an; er liefert keinen Beitrag, da $\partial a / \partial p_\nu = 0$ ist. Es bleibt also

$$(46.12) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot n \mathbf{v} = 0.$$

Das ist die Kontinuitätsgleichung für die Elektronen-Gaskomponente in der bisher bekannten Form. Die Kontinuitätsgleichung (45.14) des Phasenraumes reduziert sich also durch Mittelbildung auf die normale makroskopische Kontinuitätsgleichung.

Um die Bewegungsgleichung für das Elektronengas zu erhalten, multiplizieren wir jetzt Gl. (45.14) mit $p_\nu = m w_\nu$ und integrieren wieder über $d^3 \mathbf{p}$.

Durch Anwendung von Gl. (46.2) mit $a = m w_\nu$ auf den ersten Term ergibt sich direkt

$$(46.13) \quad T_1 = \int m w_\nu \frac{\partial f}{\partial t} d^3 p = \frac{\partial}{\partial t} (n m v_\nu).$$

Ebenso folgt mit Gl. (46.3) aus dem zweiten Term

$$(46.14) \quad T_2 = \int m w_\nu (\mathbf{w} \cdot \nabla_q) f d^3 p = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_\mu} (n m \overline{w_\nu w_\mu}).$$

Schließlich liefert die Integration des dritten Termes

$$(46.15) \quad T_3 = e \int w_\nu \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_w \right] f d^3 p = \sum_{\mu=1}^3 \int m w_\nu k_\mu \frac{\partial f}{\partial p_\mu} d^3 p.$$

Unter Benutzung von Gl. (46.8) mit $a = p_\nu = m w_\nu$ und

$$(46.16) \quad \frac{\partial m w_\nu}{\partial p_\mu} = \delta_{\mu\nu}$$

erhält man daraus

$$(46.17) \quad T_3 = -n \overline{k_\nu} = -e \int f (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B})_\nu d^3 p.$$

Da \mathbf{E} und \mathbf{B} als verschmierte, makroskopische Felder nicht mehr von der Geschwindigkeit abhängen, ist nach Gl. (45.8)

$$(46.18) \quad n \overline{k_\nu} = e (n \mathbf{E} + \frac{n}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\nu.$$

Faßt man die obigen Ausdrücke für die Terme zusammen, so folgt mit $q_\nu = x_\nu$

$$(46.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} (n m v_\nu) + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} (n m \overline{w_\nu w_\mu}) + e n (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\nu = 0.$$

Wir spalten nun die mikroskopische Geschwindigkeit \mathbf{w} der Elektronen in den mittleren makroskopischen Anteil \mathbf{v} und den fluktuierenden Anteil \mathbf{u} auf:

$$(46.20) \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Dann ist $\bar{\mathbf{u}} = 0$ und aus $\overline{w_\nu w_\mu}$ in Gl. (46.19) wird

$$(46.21) \quad \begin{aligned} \overline{w_\nu w_\mu} &= \overline{v_\nu v_\mu} + \overline{v_\nu u_\mu} + \overline{v_\mu u_\nu} + \overline{u_\nu u_\mu} \\ &= v_\nu v_\mu + \overline{u_\nu u_\mu}, \end{aligned}$$

denn es ist

$$(46.22) \quad \overline{v_\nu u_\mu} = v_\nu \bar{u}_\mu = 0, \quad \overline{v_\mu u_\nu} = v_\mu \bar{u}_\nu = 0.$$

Definieren wir weiterhin den Tensor

$$(46.23) \quad \Pi_{\nu\mu} = n m \overline{u_\nu u_\mu},$$

so geht mit der Kontinuitätsgleichung (46.12) die Gl. (46.19) über in

$$(46.24) \quad \begin{aligned} n m \frac{\partial v_\nu}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^3 n m v_\mu \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Pi_{\nu\mu} \\ + e n \left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)_\nu = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(46.25) \quad n m \frac{d v_\nu}{dt} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Pi_{\nu\mu} + e n \left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)_\nu = 0.$$

Die fluktuierenden Komponenten u_ν und u_μ sind für $\nu \neq \mu$ nicht miteinander korreliert. Dann ist aber $\overline{u_\nu u_\mu} = \bar{u}_\nu \cdot \bar{u}_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$. Damit bleibt nur $\Pi_{\nu\nu} = n m \overline{u_\nu^2} \delta_{\mu\nu}$.

Nehmen wir jetzt wie in der Zweikomponententheorie die statistische Bewegung der Teilchen als *isotrop* an (vgl. § 33), so folgt $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}$ und daher $\overline{u_\nu^2} = (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})/3 = \overline{u^2}/3$. Damit geht $\Pi_{\nu\mu}$ über in

$$(46.26) \quad \Pi_{\nu\mu} = \frac{1}{3} n m \overline{u^2} \delta_{\nu\mu}.$$

Damit bleiben vom Tensor $\Pi_{\nu\mu}$ nur drei untereinander gleiche Hauptachsenkomponenten übrig; der Tensor wird zum Skalar. Die Vektordivergenz in Gl. (46.25) geht dann in die ν -te Komponente eines Gradienten über:

$$(46.27) \quad \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \Pi_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{1}{3} n m \bar{u}^2 \delta_{\nu\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{1}{3} n m \bar{u}^2 \right).$$

Nun ist aber $m\bar{u}^2/2$ die mittlere kinetische Energie der statistischen Bewegung der Elektronen, als gleich $3kT/2$; der obige Skalar ist also der isotrope Gasdruck P des Elektronengases:

$$(46.28) \quad \Pi_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \cdot \frac{1}{3} n m \bar{u}^2 = \delta_{\nu\mu} n k T = \delta_{\nu\mu} P.$$

Fassen wir damit alle drei Komponenten ($\nu = 1, 2, 3$) der Gl. (46.25) zusammen, so bekommen wir

$$(46.29) \quad n m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = 0.$$

Das ist die makroskopische Bewegungsgleichung für das Elektronengas. Ebenso kann man die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung für das Ionen-gas herleiten. Aus diesen makroskopischen Gleichungen lassen sich dann – wie in früheren Kapiteln gezeigt – die gewöhnliche Bewegungsgleichung des Gases sowie das Ohmsche Gesetz herleiten. Je nach den Voraussetzungen, die man dabei macht, bekommt man dabei das gewöhnliche Ohmsche Gesetz der Magnetohydrodynamik oder das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz der Zweikomponententheorie. Damit ist gezeigt, daß die Vlasov-Gleichungen im Phasenraum die früheren Grundgleichungen der Zweikomponententheorie enthalten. Aber sie enthalten noch mehr!

§ 47. Störungstheorie

Jetzt wollen wir zeigen, daß die statistischen Vlasov-Gleichungen mehr Information über das Plasma enthalten als die früheren makroskopischen Gleichungen. Dazu betrachten wir noch einmal elektrostatische Wellen im Plasma und machen eine Störungstheorie ähnlich wie bei der Untersuchung der Plasmawellen in § 38. Wir werden neue, feinere Einzelheiten aus der statistischen Theorie bekommen. Insbesondere werden wir sehen, daß die Plasmaschwingungen in Wirklichkeit gedämpft sind. Die Dämpfung, die nach dem Physiker Landau benannt ist, werden wir anschließend im nächsten Paragraphen behandeln.

a) Voraussetzungen

Der Einfachheit halber nehmen wir das Ionengas als ruhend an und betrachten nur die Elektronen-Komponente über dem positiven Untergrund. Es gilt also

$$(47.1) \quad \nabla_{\mathbf{q}} f_i = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0,$$

während mit $f_e = f$, $m_e = m$ und $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}$ die Vlasov-Gleichung für die Elektronenkomponente lautet

$$(47.2) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}) f - \frac{e}{m} \left[(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \right] f = 0.$$

Alle folgenden Rechnungen beziehen sich nur auf das Elektronengas. Wie in der Theorie der Plasmawellen denken wir uns \mathbf{B}, \mathbf{E} und jetzt weiter auch f aus einem stationären Anteil und einer Störung zusammengesetzt:

$$(47.3) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1,$$

$$(47.4) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1,$$

$$(47.5) \quad f = f_0 + f_1.$$

Im ungestörten Fall sei kein elektromagnetisches Feld vorhanden, also ist

$$(47.6) \quad \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = 0.$$

Weiterhin setzen wir den ungestörten Anteil f_0 als räumlich und zeitlich konstant an, d.h.

$$(47.7) \quad \nabla_{\mathbf{q}} f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0.$$

Ferner nehmen wir an, daß im ungestörten Fall kein Strom fließen möge. Die mittlere Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 der Elektronen relativ zur (ruhenden) Ionenkomponente verschwinde. Also ist

$$(47.8) \quad \mathbf{v}_0 = \frac{1}{n_0} \int f_0 \mathbf{w} d^3 \mathbf{p} = 0.$$

Die Elektronen mögen so eine Geschwindigkeitsverteilung haben, daß $f(\mathbf{w}) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{w}| \rightarrow \infty$. Natürlich ist

$$(47.9) \quad \nabla_{\mathbf{w}} f_0 \neq 0,$$

wenn man vom trivialen Fall $f_0 \equiv 0$ absieht.

b) Störungsgleichung

Unter Vernachlässigung der Terme 2. Ordnung folgt aus Gl. (47.2):

$$(47.10) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_q) f_1 = \frac{e}{m} [(E_1 + \frac{1}{c} \mathbf{w} \times B_1) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}] f_0.$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung, linear in den Störgrößen f_1 , B_1 und E_1 . Für unabhängige Variablen, die – wie in unserem Fall t und q – nicht explizit in den Koeffizienten auftreten, kann man einen Exponentialansatz machen. Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir nur eindimensionale Störungen (in x -Richtung) an. Dann fällt der Magnetterm fort, da $\mathbf{w} \times B_1$ keine Komponente in x -Richtung hat.

Also ist

$$(47.11) \quad (\mathbf{w} \times B_1) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} f_0 = 0.$$

Wir versuchen also den Lösungsansatz

$$(47.12) \quad f_1 = \tilde{f}(w_x) \exp(-i\omega t + ilx),$$

$$(47.13) \quad f_0 = f_0(w_x),$$

$$(47.14) \quad E_{1x} = \tilde{E}_x \cdot \exp(-i\omega t + ilx).$$

Die Störampplitude \tilde{E}_x setzen wir dabei als konstant an. Statt w_x schreiben wir jetzt einfach w . Die Differentialgleichung (47.10) liefert dann

$$(47.15) \quad -i\omega \tilde{f} + iwl \tilde{f} = \frac{e}{m} \tilde{E}_x \frac{df_0}{dw}.$$

Hier tritt links die Störung \tilde{f} der Verteilungsfunktion auf, rechts die Störampplitude \tilde{E}_x des elektrischen Feldes. Um zu einer Dispersionsrelation zu kommen, brauchen wir noch eine zweite Beziehung zwischen \tilde{f} und \tilde{E}_x . Sie folgt aus

$$(47.16) \quad \nabla \cdot E = ilE_x = 4\pi\sigma.$$

Im eindimensionalen Fall gilt

$$(47.17) \quad \sigma = e Z n_i - e n_e = e Z n_i - e \int_{-\infty}^{+\infty} (f_0 + f_1) dw.$$

Da im Gleichgewichtsfall

$$(47.18) \quad e Z n_i - e \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 dw = 0$$

gilt, bleibt

$$(47.19) \quad \sigma = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} \cdot \exp(-i\omega t + ilx) dw.$$

Einsetzen in Gl. (47.16) liefert nach Division durch den Exponentialfaktor

$$(47.20) \quad il\tilde{E}_x = -4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} dw.$$

c) Die Dispersionsrelation

Wir eliminieren nun \tilde{f} aus Gl. (47.15):

$$(47.21) \quad f = -i \frac{e\tilde{E}_x}{lm} \frac{df_0/dw}{w_x - \omega/l}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (47.20) erhalten wir schließlich die Dispersionsrelation für elektrostatische Wellen im Plasma ohne Magnetfeld

$$(47.22) \quad \frac{4\pi e^2}{l^2 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0/dw}{w - \omega/l} dw = 1.$$

Früher, etwa in § 39, war die Dispersionsrelation immer eine algebraische Gleichung für ω und l mit Koeffizienten aus den ungestörten Größen. Jetzt in der statistischen Theorie enthält die Dispersionsrelation ein Integral. Wir wollen die Gl. (47.22) noch ein wenig umformen:

Die ungestörte Teilchenzahldichte ist

$$(47.23) \quad n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 dw.$$

Damit definieren wir eine normierte Verteilungsfunktion

$$(47.24) \quad F(w) = \frac{f_0(w)}{n_0},$$

für die gilt

$$(47.25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F dw = 1.$$

Ersetzen wir f_0 in Gl. (47.22) durch $n_0 F$ und berücksichtigen

$$(47.26) \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m},$$

so erhalten wir die Dispersionsrelation in der Form

$$(47.27) \quad \frac{\omega_p^2}{l^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF/dw}{w-\omega/l} dw = 1.$$

Sind $F(w)$, ω_p und l für eine Welle vorgegeben, so kann man mit dieser Gleichung die Frequenz ω und mit ihr die Phasengeschwindigkeit $v_{ph}^2 = \omega^2/l^2$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = d\omega/dl$ für diese Welle berechnen. Die Dispersionsrelation (47.27) ist eine Verallgemeinerung der einfacheren Dispersionsrelationen, die wir bei der Diskussion der Plasmawellen im Rahmen der Zweikomponententheorie erhielten (§ 39). Dort ergab sich einfach $\omega = \omega_p^2$ für das kalte Plasma und

$$(47.28) \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3kTl^2}{m}$$

($k =$ Boltzmannkonstante) für das Plasma der Temperatur T . Das Neue an der Dispersionsrelation (47.27) ist, daß man für verschiedene Verteilungsfunktionen verschiedene Ergebnisse erhält. In gewisser Weise hat man allerdings diesen Effekt auch schon bei der alten Dispersionsrelation (47.28): Dort geht – indirekt über die Temperatur – auch schon Information über die Verteilungsfunktion ein.

Wir werden in § 49 sehen, daß die alte Dispersionsrelation im Fall einer Maxwellverteilung eine Näherung für Gl. (47.27) ist. Neu an der Dispersionsrelation (47.27) ist, daß sie auch für *komplexes* ω nicht-singuläre Lösungen hat. Das führt auf die Landau-Dämpfung, die wir im nächsten Paragraphen behandeln werden.

§ 48. Landau-Dämpfung

Wie schon gesagt, führt die Dispersionsrelation (47.27) möglicherweise auf komplexe Frequenzen ω . Das bedeutet das Auftreten von gedämpften oder angeregten Wellen. Wir werden sehen, daß der Betrag des Imaginärteils ω_I von ω klein ist im Vergleich zum Realteil ω_R . Das war schon zu erwarten, denn die Zweikomponententheorie lieferte in Gl. (39.14) einen reellen Wert für ω ; wir können ihn als Näherungswert benutzen. Dazu wollen wir das in der Dispersionsrelation (47.27) auftretende Integral

$$(48.1) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF/dw}{w - \omega/l} dw = -\frac{l}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF/dw}{1 - wl/\omega} dw$$

genauer studieren.

Wir müssen zunächst einiges über die Form der Verteilungsfunktion F voraussetzen: Für beliebig große Geschwindigkeiten möge dF/dw so stark nach Null gehen, daß das Integral existiert. Das ist aus physikalischen Gründen für eine Verteilungsfunktion sinnvoll, man denke zum Beispiel an den speziellen Fall einer Maxwell-Verteilung. Weiterhin habe F bei $w = 0$ ein Maximum, F möge also qualitativ der glockenartigen Form der Maxwell-Verteilung ähneln und möge in guter Näherung symmetrisch um $w = 0$ liegen.

Der Verlauf der Funktion unter dem Integral (48.1) und damit die Werte des Real- und Imaginärteiles des Integrals werden durch das Verhalten des reellen Zählers dF/dw und des komplexen Nenners $w - \omega/l$ bestimmt. Das charakteristische Verhalten der Realteile von Zähler und Nenner ist in Abb. 48.1 gezeigt. Der Zähler bestimmt in der Nachbarschaft der Nullstelle $w = 0$, der Nenner bei $w = \omega_R/l$ das Verhalten des Integranden.

Wenn nun diese beiden Nullstellen genügend weit voneinander entfernt sind, kann man das Integral auf folgende Weise approximieren: Es sei w^* ein Wert, der zwischen den beiden Nullstellen liegt, dann zerlegen wir das Integral I in zwei Teilintegrale

$$(48.2) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \int_{-\infty}^{w^*} \dots + \int_{w^*}^{+\infty} \dots = I_1 + I_2^-$$

Zur Berechnung von I_1 berücksichtigen wir hauptsächlich die Funktion dF/dw und approximieren den Nenner in diesem Bereich nur grob, analog berücksichtigen wir zur Berechnung von I_2 den Nenner genau und machen dort eine grobe Näherung für dF/dw .

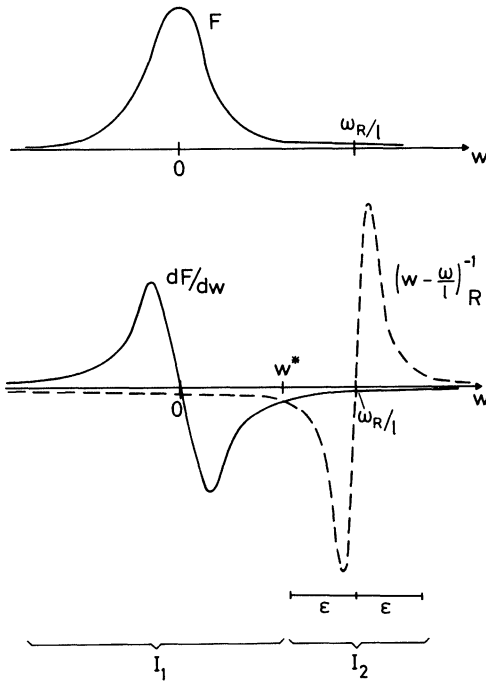


Abb. 48.1 Beiträge zum Integral in Gl. (48.1). Im oberen Teil die Verteilungsfunktion F , deren Ableitung (im unteren Bild) den Zähler des Integranden gibt. Die gestrichelte Kurve stellt den Realteil des vom Nenner herrührenden Beitrages dar. Die Extrema dieser Kurve gehen mit verschwindendem ω_1 nach $\pm\infty$. Zur genäherten Integration wird das Integral in die beiden Teile I_1 und I_2 aufgespalten.

Für diese Näherung müssen natürlich die beiden Nullstellen des Realteils des Integranden genügend weit getrennt sein. Für eine vorgegebene Breite der glockenförmigen Kurve von F um $w = 0$ muß also ω_R/l hinreichend groß gegen $|w|$ sein. (Diese Breite der Kurve ist im Fall einer Maxwell-Verteilung ein Maß für die Temperatur des Plasmas. Für die hier vorliegende allgemeinere Verteilungsfunktion F ist die Temperatur nicht definiert). Das heißt aber, l muß genügend klein, die Wellenlänge der Störung genügend groß sein. Durch eine geeignete Wahl von l ist das immer erreichbar.

Wir berechnen nun zunächst den Beitrag von I_1 . In dem Bereich, wo dF/dw wesentlich von Null verschieden ist, gilt

$$(48.3) \quad |w| \ll |\omega|/l \quad \text{bzw.} \quad |lw/\omega| \ll 1,$$

der Nenner kann also entwickelt werden:

$$(48.4) \quad \left(1 - \frac{lw}{\omega}\right)^{-1} = 1 + \frac{lw}{\omega} + \left(\frac{lw}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{lw}{\omega}\right)^3 + \dots$$

Damit folgt

$$(48.5) \quad I_1 = -\frac{l}{\omega} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF}{dw} dw + \frac{l}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF}{dw} w dw + \right. \\ \left. + \frac{l^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF}{dw} w^2 dw + \frac{l^3}{\omega^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF}{dw} w^3 dw + \dots \right].$$

Dabei haben wir die obere Integralgrenze wieder durch $+\infty$ ersetzt, in der Hoffnung, daß wir keinen großen Fehler machen. Partielle Integration liefert

$$(48.6) \quad I_1 = -\frac{l}{\omega} [F]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{l^2}{\omega^2} [Fw]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{l^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F dw \\ - \frac{l^3}{\omega^3} [Fw^2]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{l^3}{\omega^3} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} Fw dw \\ - \frac{l^4}{\omega^4} [Fw^3]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{l^4}{\omega^4} 3 \int_{-\infty}^{+\infty} Fw^2 dw + \dots$$

Wir beachten nun, daß F , Fw , Fw^2 und Fw^3 im Unendlichen verschwinden und daß das Integral über Fw verschwindet, weil Fw im Bereich um $w = 0$ eine ungerade Funktion ist und erhalten bis auf Terme höherer Ordnung

$$(48.7) \quad I_1 = \frac{l^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{l^2}{\omega^2} \overline{w^2}\right).$$

Wir berechnen jetzt den Beitrag von I_2 .

Wir nehmen an, daß sich die Funktion dF/dw in der Nähe von ω/l nicht mehr viel ändert und erstrecken das Integral I_2 von $(\omega/l) - \epsilon$ bis $(\omega/l) + \epsilon$, wo ϵ eine positive Zahl ist (vgl. Abb. 48.1):

$$(48.8) \quad I_2 = \left(\frac{dF}{dw}\right)_{w=\omega/l} \int_{(\omega/l)-\epsilon}^{(\omega/l)+\epsilon} \frac{dw}{w - \omega/l} = \left(\frac{dF}{dw}\right)_{w=\omega/l} \cdot J,$$

wobei wir für das Integral die Abkürzung J eingeführt haben. Durch Erweiterung mit dem konjugiert Komplexen des Nenners im Integral J ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (48.9) \quad J &= \int_{(\omega_R/l)-\epsilon}^{(\omega_R/l)+\epsilon} \frac{d\omega}{\omega - \omega/l} = \int \frac{d\omega}{(\omega - \omega_R/l) - i\omega_I/l} = \\
 &= \int \frac{(\omega - \omega_R/l)}{(\omega - \omega_R/l)^2 + (\omega_I/l)^2} d\omega + \frac{i\omega_I}{l} \int \frac{d\omega}{(\omega - \omega_R/l)^2 + (\omega_I/l)^2} \\
 &= J_1 + J_2 .
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir der Übersichtlichkeit halber die Integralgrenzen nicht immer hingeschrieben. Mit $x = \omega - \omega_R/l$ und $a = \omega_I/l$ hat J_1 die Form

$$(48.10) \quad J_1 = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{x \, dx}{x^2 + a^2} .$$

J_1 verschwindet also, da x eine ungerade Funktion ist. Es bleibt das Integral

$$(48.11) \quad J_2 = \frac{i\omega_I}{l} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{i\omega_I}{l} \cdot \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} .$$

Da der Imaginärteil von ω als sehr klein angenommen wurde (siehe Abb. 48.2), ist a klein und man kann die Grenzen $\pm \epsilon$ nach $\pm \infty$ gehen lassen, ohne am Wert des arctan viel zu ändern.

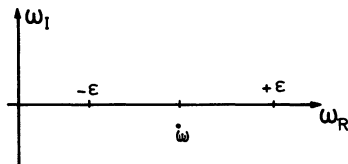


Abb. 48.2 Der Imaginärteil von ω wird als klein gegenüber dem Realteil angenommen.

Also erhalten wir schließlich

$$(48.12) \quad J = J_2 = i\omega_I/l \cdot l\pi/\omega_I = i\pi .$$

Der Wert des Integrals ist also in unserer Näherung unabhängig von ω_I . Es ergibt sich damit für den zweiten Anteil

$$(48.13) \quad I_2 = i \pi \left(\frac{dF}{dw} \right)_{w=\omega/l} .$$

Aus Gl. (47.27) und (48.2) folgt dann

$$(48.14) \quad \frac{\omega_P^2}{l^2} (I_1 + I_2) = 1 .$$

Daraus ergibt sich die Dispersionsrelation in komplexer Form zu

$$(48.15) \quad \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_P^2 [1 + 3 (l/\omega)^2 \overline{w^2}] + \frac{\omega_P^2 \omega^2}{l^2} i \pi \left(\frac{dF}{dw} \right)_{\omega/l} = \\ &= \omega_P^2 + \omega_P^2 \left[3 \frac{l^2}{\omega^2} \overline{w^2} + \frac{\omega^2}{l^2} i \pi F'(\omega/l) \right] . \end{aligned}$$

Sie wird nur durch ein komplexes ω gelöst. Da die Zweikomponententheorie, in der $\omega = \omega_P$ war, bereits eine Näherung darstellt, setzen wir an

$$(48.16) \quad \omega = \omega_R + i \omega_I = \omega_P + \delta \omega_R + i \omega_I ,$$

wobei $\delta \omega_R + i \omega_I$ nur eine kleine Störung sein möge. Dann wird

$$(48.17) \quad \omega^2 = (\omega_R + i \omega_I)^2 = \omega_R^2 + 2 i \omega_R \omega_I = \omega_R^2 + 2 i \omega_P \omega_I .$$

Setzt man das in Gl. (48.15) ein, so ergibt sich

$$(48.18) \quad \omega_R^2 + 2 i \omega_P \omega_I = \omega_P^2 \left[1 + 3 \frac{l^2}{\omega_P^2} \overline{w^2} \right] + \frac{\omega_P^2 \cdot \omega_P^2}{l^2} \cdot i \pi \left(\frac{dF}{dw} \right)_{\omega_P/l} .$$

Spalten wir diese Dispersionsrelation in ihren Real- und Imaginärteil auf, erhalten wir schließlich die beiden Beziehungen

$$(48.19) \quad \omega_R^2 = \omega_P^2 \left(1 + 3 \frac{l^2}{\omega_P^2} \overline{w^2} \right), \quad \omega_I = \frac{\pi}{2} \omega_P \frac{\omega_P^2}{l^2} F' \left(\frac{\omega_P}{l} \right)$$

oder

$$(48.20) \quad \omega_R^2 = \omega_P^2 + 3 l^2 \overline{w^2}, \quad \omega_I = \frac{\pi \omega_P}{2} v_{ph}^2 F' \left(\frac{\omega_P}{l} \right),$$

wobei $v_{ph} = \omega_P/l$ die Phasengeschwindigkeit ist. Das ist die Lösung der Dispersionsrelation, die mit einem Integral in der komplizierten Form (47.27) vorlag. Den Realteil von Gl. (48.19) kennen wir schon: Er entspricht der Dispersionsrelation (39.14), die wir in der Zweikomponententheorie für das nicht-kalte Plasma kennenlernten.

Neu dagegen ist die Beziehung für den Imaginärteil, er bestimmt das zeitliche Verhalten der Störung: Die Störungen waren proportional zu

$$(48.21) \quad \exp(-i \omega t) = \exp(-i \omega_R t) \cdot \exp(\omega_I t)$$

angesetzt. Man hat also bei $\omega_I > 0$ Anregung der Störung und entsprechend bei $\omega_I < 0$ Dämpfung. Das Vorzeichen von ω_I wird aber nach Gl. (47.27) von F' an der Stelle ω/l bestimmt; für $F'(\omega/l) > 0$ ergibt sich also Anregung und für $F'(\omega/l) < 0$ Dämpfung.

Ist $F(w)$ die Maxwellsche Verteilungsfunktion, dann ist für alle w die Bedingung $dF/dw < 0$ erfüllt, also auch für die Stelle $w = \omega/l$. Die Plasmaschwingungen sind also gedämpft. Hier haben wir einen Effekt, den es in der makroskopischen Zweikomponententheorie nicht gab! Die Dämpfung, die durch ω_I im Fall von $F'(\omega/l) < 0$ gegeben wird, heißt die *Landau-Dämpfung*. Die hier gefundene Dämpfung hat nichts mit Reibung zu tun. Reibung kommt ja durch den Impulsaustausch bei engen Vorübergängen (Stößen) zustande, diesen Austausch haben wir durch Verschmieren des elektromagnetischen Feldes ausgeschaltet. Die Landau-Dämpfung ist etwas vollständig Neues!

§ 49. Dämpfung und Anregung

In diesem Paragraphen wollen wir die im § 48 gefundenen Dämpfungs- und Anregungsmechanismen an zwei Beispielen diskutieren. Zunächst wollen wir für F die Maxwell-Verteilung einsetzen und das dämpfende ω_I berechnen. Die Maxwell-Verteilung eines Elektronengases für den von uns betrachteten eindimensionalen Fall ist

$$(49.1) \quad F = \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}} \cdot \exp(-m w^2/2 k T)$$

mit der Boltzmann-Konstanten k . Für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat kann man gemäß der Formel

$$(49.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

den Ausdruck

$$(49.3) \quad \overline{w^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 F dw = \frac{kT}{m}$$

bilden. Der Realteil der Dispersionsrelation liefert

$$(49.4) \quad \omega_R^2 = \omega_p^2 + 3l^2 kT/m$$

und der Imaginärteil mit $\omega_p/l \approx v_{ph}$:

$$(49.5) \quad \begin{aligned} \omega_I &= -\frac{\pi \omega_p}{2} v_{ph}^2 \frac{2m v_{ph}}{2kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \exp(-m v_{ph}^2/2kT) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi} \omega_p}{2\sqrt{2}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v_{ph}^3 \cdot \exp(-m v_{ph}^2/2kT). \end{aligned}$$

Mit der Debyelänge (vgl. Gl. (34.10))

$$(49.6) \quad D_0^2 = \frac{3kT}{4\pi e^2 n} = \frac{3kT}{m} \cdot \frac{1}{\omega_p^2}$$

folgt

$$(49.7) \quad \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} = D_0^{-3} (3)^{3/2} \omega_p^{-3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{D_0 \omega_p}\right)^3.$$

Weiterhin ist wegen $v_{ph} = \omega/l \approx \omega_p/l$

$$(49.8) \quad \frac{m v_{ph}^2}{2kT} = \frac{1}{2} \frac{m}{kT} \frac{\omega_p^2}{l^2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 D_0^2 l^2} = \frac{3}{2l^2 D_0^2}.$$

Setzt man die beiden letzten Beziehungen in Gl. (49.5) ein, so erhält man schließlich

$$(49.9) \quad \omega_I = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_P}{D_0^3 l^3} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2 l^2 D_0^2}\right).$$

Die dimensionslose Größe ω_I/ω_P ist ein Maß für die Stärke der Dämpfung. Sie gibt die relative Änderung der Schwingungsamplitude während der Schwingungszeit $1/\omega_P$. Das Verhältnis ω_I/ω_P hängt nur noch von der dimensionslosen Zahl lD_0 ab. Ist $lD_0 \ll 1$, d.h., $D_0 \ll \lambda$, so ist auch die Dämpfung klein. Bei $lD_0 \gg 1$ geht zwar die Exponentialfunktion gegen 1, der Faktor davor aber gegen Null, so daß die Dämpfung wieder klein wird. Dazwischen hat die Dämpfung ein Maximum.

Für ein nicht zu heißes Plasma und genügend große Wellenlängen der Störungen (l genügend klein) ist ω_R nach Gl. (49.4) im wesentlichen gleich ω_P . Dann ist nach Gl. (49.9)

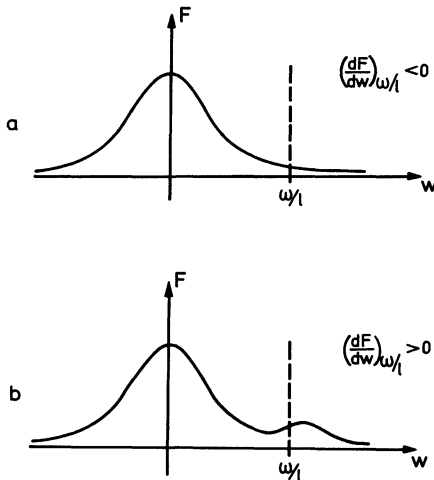


Abb. 49.1 (a) Im Fall einer Maxwellverteilung ist dF/dw an der Stelle $w = \omega/l$ negativ. Schwingungen sind gedämpft.

(b) Das ruhende Elektronengas wird von einer zweiten Komponente mit der Geschwindigkeit $w_2 > \omega/l$ durchströmt. Die Elektronen dieser Komponente sind um w_2 Maxwell-verteilt. Wenn die Dichte der bewegten Komponente hinreichend groß ist, dann wird dF/dw an der Stelle $w = \omega/l$ positiv. Es bilden sich dann Schwingungen aus.

$$(49.10) \quad \frac{\omega_I}{\omega_R} \sim \frac{1}{D_0^3 l^3} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2 l^2 D_0^2}\right)$$

wegen $D_0 l \ll 1$ eine kleine Zahl. Die Annahme in § 48, daß $\omega_I \ll \omega_R$ ist, ist also gerechtfertigt.

Für das Auftreten des negativen, also dämpfend wirkenden ω_I bei der Maxwell-Verteilung ist entscheidend, daß die Ableitung von F an der Stelle $w = \omega/l$ negativ ist (Abb. 49. 1a). Wenn F' dort positiv wird, sollte man entsprechend ein Anwachsen der Störung, also eine Instabilität erwarten.

Das ist zum Beispiel bei einem Plasma der Fall, in das ein Strahl von Elektronen mit hoher Geschwindigkeit eingeschossen wird. Die Verteilungsfunktion der Elektronen bekommt dann zusätzlich zur um $w = 0$ symmetrischen Glockenkurve der Maxwell-Verteilung einen Buckel. Es entstehen dann anwachsende Schwingungen der Wellenzahl l . Der Elektronenstrahl tritt in Wechselwirkung mit dem Plasma und gibt über die Schwingungen seine Energie an das Plasma ab. Dieser Effekt heißt *Zwei-Strom-Instabilität*.

Wir haben damit wieder einen gegenüber der Magnetohydrodynamik neuen Effekt: Die Energieübertragung vom Elektronenstrahl auf das Plasma geschieht durch elektromagnetische Wellen. Reibung ist für die Energieübertragung nicht notwendig, denn im Rahmen der statistischen Theorie hatten wir ja Stöße (oder genauer gesagt, enge Vorübergänge) unberücksichtigt gelassen.

Die Zwei-Strom-Instabilität wirkte sich zusätzlich zur Würstchen-Instabilität störend bei den Versuchen zur Konstruktion eines Fusionsreaktors aus: Durch Stoßionisation und Entladung werde in einem verdünnten Gas ein Plasmaschlauch erzeugt; der Entladungsstrom sorgt dann gleichzeitig für das Magnetfeld, das den Plasmaschlauch zusammenquetscht. Man erhält die in § 24 a behandelten Konfiguration. Nun haben aber schnelle Elektronen der Maxwell-Verteilung eine besonders große freie Weglänge und stoßen sich kaum mit den Ionen und den langsamen Elektronen (der Stoßquerschnitt sinkt mit steigender Geschwindigkeit). Wenn sie gegen die Richtung des elektrischen Feldes laufen, können noch weiter beschleunigt werden, und da sie dann noch seltener stoßen, können immer mehr vorher langsamere Elektronen schnell werden (Runaway-Elektronen). Schließlich bilden sie einen Buckel auf der Maxwell-Verteilung. Es kommt dann zur Zwei-Strom-Instabilität.

LITERATUR

(Das Verzeichnis enthält neben im Text zitierten Arbeiten auch weiterführende Monographien und einschlägige Tagungsberichte.)

- Alfven, H., 1950, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford.
- Angel, J.R.P., Landstreet, J.D., 1971a, *Ap. J.* **164**, L 15.
- Angel, J.R.P., Landstreet, J.D., 1971b, *Ap. J.* **165**, L 71.
- Babcock, H.W., Babcock, H.D. 1955, *Ap. J.* **121**, 349.
- Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D., Kulsrud, R.M., 1958, *Proc. Roy. Soc.* **244A**, 17.
- Biermann, L., 1941, *Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft* **76**, 194.
- Biermann, L., 1950, *Z. f. Naturforschung* **5a**, 65.
- Boischot, A., 1967, in: *Plasma Astrophysics*, ed. P.A. Sturrock, New York, Acad. Press, p. 142.
- Bridle, A.H., Venugopal, V.R., 1969, *Nature* **224**, 545.
- Burgers, J.M., 1917, *Ann. d. Phys.* **52**, 195.
- Burkhardt, G., Schlüter, A., 1949, *Z. Astrophys.* **26**, 295.
- Cap. F., Einführung in die Plasmaphysik, 1970, Bd. I: Theoretische Grundlagen, 1972, Bd. II: Wellen u. Instabilitäten, 1972, Bd. III: Magneto-hydrodynamik, Berlin, Oxford, Braunschweig.
- Chandrasekhar, S., 1960, *Plasma Physics*, Chicago.
- Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford.
- Chanmugam, G., O'Connell, R.F., Rajagopal, A.K., 1972, *Ap. J.* **175**, 157.
- Cowling, T.G., 1953, *Solar Electrodynamics in G.P. Kuiper: The Sun*, p. 571, Chicago.
- Cox, J.P., Giuli, R.T., 1968, *Stellar Structure*, New York.
- Davies, R.D., 1969, *Nature* **223**, 355.
- Deinzer, W., 1971, *Mitt. d. Astron. Ges. Nr.* **30**, 67.
- Emden, R., 1907, *Gaskugeln*, Berlin.
- Ferraro, V.C.A., 1937, *Mon. Not. Roy. Soc.* **97**, 458.
- Ferraro, V.C.A., Plumpton, C., 1966, *An Introduction to Magneto-Fluid Mechanics*, 2nd ed., Oxford University Press.
- Fisser, H., Kippenhahn, R., 1959, *Z. f. Naturforsch.* **14a**, 37.
- Frank-Kamenezki, D.A., 1963, *Plasma – der vierte Aggregat-Zustand der Materie*, Verlag Progress Moskau.
- Frank-Kamenezki, D.A., 1967, *Vorlesungen über Plasmaphysik*, Berlin.
- Fricke, K.J., Kippenhahn, R., 1972, *Ann. Rev. Astr. & Astrophys.* **10**, 45.
- Goldreich, P., Julian, W.H., 1969, *Ap. J.* **157**, 869.
- Gurm, H.S., Wentzel, D.G., 1967, *Ap. J.* **149**, 139.
- Hain, K., Lüst, R., Schlüter, A., 1957, *Z. f. Naturforsch.* **12a**, 834.
- Hess, W.N., 1972, "The Earth's Radiation Belt" in *Handbuch der Physik*, Band 49/4, Berlin.
- Holt, E.H., Haskell, R.E., 1965, *Foundation of Plasma Dynamics*, Macmillan Comp., New York.
- Howard, R., 1965, *Large Scale Solar Magnetic Fields in "Stellar and Solar Magnetic Fields"*, ed. R. Lüst, Amsterdam.
- Hoyle, F., 1949, *Recent Researches in Solar Physics*, Cambridge.

- Kaplan, S.A., Pikelner, S.B., 1970, *The Interstellar Medium*, Cambridge, Mass. p. 227.
- Kemp, J.C., 1970, *Ap. J.* **162**, 169;
- Kemp, J.C., Swedlund, J.B., Landstreet, J.D., Angel, J.R.P., 1970, *Ap. J.* **161**, L 79.
- Kertz, W., 1969, *Einführung in die Geophysik I*, Bibl. Inst., Mannheim.
- Kertz, W., 1971, *Einführung in die Geophysik II*, Bibl. Inst., Mannheim.
- Kippenhahn, R., 1963, *Stars with Helium-Rich Cores in "International School of Physics 'Enrico Fermi'"*, Vol. XXVIII, p. 330, New York.
- Kippenhahn, R., Schlüter, A., 1957, *Z. f. Astrophys.* **43**, 36.
- Kraft, R.P., 1967, *Ap. J.* **150**, 551.
- Krause, F., Rädler, K.H., 1971, in "Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gas-elektronik", Band II (ed. R. Rompe, M. Steenbeck), Berlin.
- Kulsrud, R., Pearce, W.P., 1969, *Ap. J.* **156**, 445.
- Lüst, R., Schlüter, A., Katterbach, K., 1956, *Nachr. Akad. d. Wiss. Göttingen*, **IIa**, 127.
- Maran, S.P., Cameron, A.G.W., 1968, *Physics Today* **21**, No. 8, p. 41.
- Mestel, L., 1971, *Q. Jl. R. Astr. Soc.* **12**, 402.
- Mestel, L., Roxburgh, I.W., 1962, *Ap. J.* **136**, 615.
- Meyer, F., Schmidt, H.U., 1958, *Z. Naturforschung* **13a**, 1005.
- Northrop, T.G., 1963, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience Publ., New York.
- Ostriker, J.P., Gunn, J.E., 1969, *Ap. J.* **157**, 1395.
- Parker, E.N., 1969, *Space Science Rev.* **9**, 651.
- Parker, E.N., 1970a, *Ann. Rev. of Astron. & Astrophys.* **8**, 1.
- Parker, E.N., 1970b, *Ap. J.* **162**, 666.
- Roberts, P.H., Stix, M., 1972, *Astron. & Astrophys.* **18**, 453.
- Rudermann, M., 1972, *Ann. Rev. Astron. & Astrophys.* **10**, 427.
- Schaefer, C., 1951, *Einführung in die theoretische Physik*, Bd. III, 2, p. 61, Berlin.
- Schatzmann, E., 1954, *Ann. d'Astrophys.* **17**, 300.
- Schindler, K. (ed.), 1972, *Cosmic Plasma Physics*, Plenum Press, New York, London.
- Schlüter, A., 1950, *Z. f. Naturforschung*, Bd. 5a, 72
- Schlüter, A., 1959, *Einführung in die Plasmaphysik*, Vorlesungsausarbeitung von H. Wittern und K.H. Wöhler.
- Schröter, E. H., 1966, "A Remark concerning the Electrical Conductivity in Visible Layers of Sunspots" in *Atti del Convegno Sulle Macchie Solari*, Firenze (p. 222).
- Schwarzschild, M., 1958, *Structure and Evolution of the Stars*, New York.
- Skumanich, A., 1972, *Astrophys. J.* **171**, 565.
- Spitzer, L., 1962, *Physics of Fully Ionized Gases*, 2nd ed., Interscience Publishers, New York, London.
- Stix, T.H., 1962, *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York.
- Tanenbaum, B.S., 1967, *Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York.
- Unsöld, A., 1955, *Physik der Sternatmosphären*, Berlin, p. 644.
- Weber, E.J., Davis, L., 1967, *Astrophys. J.* **148**, 217.
- Weiss, N.O., 1966, *Proc. Roy. Soc. London* **A293**, 310.

REGISTER

A

- Abbremsung der Sonnenrotation 189
- Abklingzeiten von Magnetfeldern 64, 65, 68
- Adiabatenbeziehung 103
- Adiabatenexponent 103, 146
- Adiabatische Invarianten 43
- α -Effekt 91
- α - ω -Dynamo 95
- Alfvén-Geschwindigkeit 148
- Alfvén-Wellen 147, 259
- Anisotroper Gasdruck 220
- Auftrieb, magnetischer 136
- Axialsymmetrische Magnetfelder 25
 - – und Teilchenbewegung 25

B

- Bewegungsgleichung für geladene Teilchen 12
 - der Magnetohydrodynamik 102
 - der Zweikomponententheorie 202, 279
- Biermanns Batterie 230
- Brechungsindex 246, 251, 263
- Brechung von Radiowellen in der Sonnenkorona 251

C

- Cowlingscher Satz 79

D

- Debye-Länge 220
- Diffusion, schleichende 208
- Dipolfeld 31
- Dispersion 246
- Dispersionsmaß 249
- Dispersionsrelation 154, 242, 255, 282

- Dissipation von Magnetfeldern 63
- Drehimpuls, verallgemeinerter 29
- Drehimpuls der Sterne 184
- Drehimpulsverlust der Sonne 189
- Driftbewegung 21, 232
- Druckdiffusionsterm 210, 214
- Druck, magnetischer 99, 113
- Dynamo 92
- Dynamo-Problem 77
- Dynamotheorie, statistische 86

E

- Eingefrorene Feldlinien 62
- Einheiten 11
- Elektrodynamik mittlerer Felder 86
- Energieprinzip 176
- Energiesatz für geladene Teilchen 13
- Energiesatz in der Magnetohydrodynamik 98
- Ergodische Felder 126
- Erlaubte Gebiete 29, 46

F

- Faraday-Effekt 262
- Faraday-Rotation 265
- Filamente 117
- Flasche, magnetische 40
- Flächendichte 117
- Flächenkraftdichte 110
- Flächenstrom 111
- Flußfunktion 26
- Flüssige Linie 59
- Frei-Fall-Zeit 198
- Frequenzdrift 255
- Frequenzdrift der Pulsarsignale 247
- Friedrichs-Diagramm 158

G

- Gasdruck 279
- Gaußscher Satz für Tensoren 108

Geschwindigkeitsfeld, turbulentes 92
 Gravitation 225
 Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik 102
 Grundgleichungen der Zweikomponententheorie 201, 274
 Gruppengeschwindigkeit 245
 Gyration 13
 Gyrationenbewegung 231
 Gyrationenfrequenz 15
 Gyrationradius 15

H

Hall-Term 210, 214
 Hamiltonfunktion 270
 Hamiltonsche kanonische Bewegungsgleichungen 270
 Hartmann Strömung 127
 Hartmannsche Zahl 134
 Hodograph 158
 Homogene Schichtdicke 120, 137

I

Integrale der Bewegung 27
 Isorotation 182

K

Knick-Instabilität 165
 Kompressionswellen, magnetohydrodynamische 149
 Korona der Sonne 250
 Kraftdichte, magnetische 97
 Kraftfreie Magnetfelder 123

L

Ladungstrennung im Gravitationsfeld 227
 Landau-Dämpfung 284
 Larmorfrequenz 15
 Larmorradius 15

Leitfähigkeit 55, 134, 206, 212, 274
 Leitfähigkeit, turbulenzbedingte 91
 Liouvillescher Satz 270
 Lorentzkraft 13

M

Magnetfeld der Erde 45
 –, interstellares 68, 265
 – in Neutronensternen 67
 – in rotierenden Sternen 181
 – in Sonnenflecken 68
 – in weißen Zwergen 67
 Magnetischer Fluß 59
 Magnetisches Moment 36
 Magnetische Sterne 65
 – Veränderliche 65
 – Zelle 143
 Magnetohydrodynamik 54, 97
 Magnetohydrokinematik 54
 Magnetohydrokinematische Näherung 54
 Magnetohydrostatik 105
 Makroskopische und mikroskopische Betrachtungsweise 231
 Maßsystem 11
 Maxwellsche Gleichungen 12
 Maxwellscher Spannungstensor 107
 Maxwell-Verteilung 289
 Meridionales Feld 26
 Moment, magnetisches 36

O

Oberflächenladung einer Plasmawolke 229
 Ohmsches Gesetz 56, 87
 – –, verallgemeinertes 206

P

Parallelströmung mit Rückwirkung des Feldes 127
 Parallelströmung quer zum Magnetfeld 71

Partialdrücke des Zweikomponentengases
216

Phasengeschwindigkeit 55, 245
Phasenraum 268
Pinch-Effekt 163
Plasma 9–292
Plasmafrequenz 224, 240, 254
Plasmaschwingungen 239
Polarisation, elliptische 262
–, zirkulare 258
Poloidales Feld 26
Polarlichter 49
Poynting-Vektor 98
Pulsare 194, 247
Pulsarsignale 248

Q

Quasineutralität 203, 220

R

Radioausbrüche auf der Sonne 253
Radiowellen in der Sonnenkorona 250
Raumladung einer Plasmawolke 228
Rechte-Hand-Regel 15
Reflexionsbedingungen am Flaschenhals
41
Reynoldszahl, magnetische 71
Rotation 181
Rotationsmaß 265

S

Schallgeschwindigkeit 245
Sonnenfilamente 117
Stabilitätsprobleme 163
Stabilitätstheorie 169
Statistische Geschwindigkeitsfelder
86
Statistische Theorie 268
Sternwind 187, 190
Stoßfrequenz 212
Strahlungsgürtel, künstliche 53
Strombeschleunigungsterm 208, 214
Stromfunktion, magnetische 73

T

Tensor des Impulsstromes 106
Toroidales Feld 26
Transformationsgleichungen für das
elektromagnetische Feld 12

U

Unstetigkeitsflächen 109

V

Van-Allen-Gürtel 50
Verbotene Gebiete 29, 46
Verteilungsfunktion 268
Viskosität 102, 134
Vlasov-Gleichungen 271

W

Weiss'sche Lösungen 74
Wellenausbreitung entlang magnetischer
Feldlinien 255
Wellen im beliebigen Winkel zum
Magnetfeld 151
Wellen im Plasma ohne Magnetfeld 242
Wellen, magnetohydrodynamische 144
Wellen in der Zweikomponententheorie
239
Wellen in der statistischen Theorie 282
Wind, stellarer 190
Wirbelsätze 235
Wirbelstärke 237
Würstchen-Instabilität 164

Z

Zug, magnetischer 100, 116
Zustandsgleichung 102
Zweikomponententheorie 201
Zwei-Strom-Instabilität 292
Zylinderkoordinaten 25